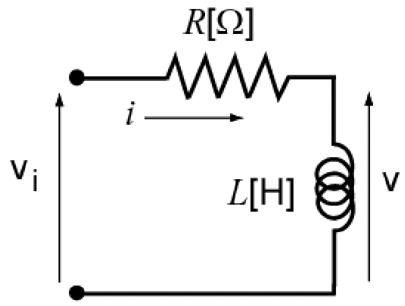
1-4.線形回路の定常波応答

1-4-1 回路の線形性

右図の R-C 直列回路を流れる電流をiとすると、インダクタンスLの両端の電圧vと電流iの関係は次の式で表される。



$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$

電圧の関係から、

$$v_i(t) = Ri(t) + v(t) = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t)$$

すなわち、

$$L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) = v_i(t) \tag{1.19}$$

ここで、$v_i(t)$を入力、$i(t)$を応答と考え、入力と応答の関係が線形であるかどうかを考えてみる。

入力$v_{i\,n}(t)$を与えた場合の応答を$i_n(t)$とすると、それぞれの入出力の間には次の関係が成り立つ。

$$L\frac{d}{dt}i_n(t) + Ri_n(t) = v_{i\,n}(t)$$

上式の両辺に任意の係数a_nをかけると、全てのnについて次式が成り立つ。

$$a_n\left(L\frac{d}{dt}i_n(t) + Ri_n(t)\right) = a_n v_{i\,n}(t)$$

$n = 1,2,3,\cdots,N$について和をとると、次のように変形することができる。

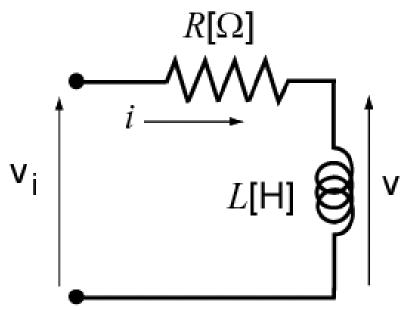
$$\sum_{n=1}^{N} a_n\left(L\frac{d}{dt}i_n(t) + Ri_n(t)\right) = \sum_{n=1}^{N} a_n v_{i\,n}(t)$$

$$L\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n i_n(t)\right) + R\left(\sum_{n=1}^{N} a_n i_n(t)\right) = \sum_{n=1}^{N} a_n v_{i\,n}(t) \tag{1.20}$$

式(1.20)を式(1.19)と対比させると、入力$\sum_{n=1}^{N} a_n v_{i\,n}(t)$に対する応答は$\sum_{n=1}^{N} a_n i_n(t)$となることがわかる。
すなわち、線形システムの定義により、この回路は線形システムであるといえる。

1-4-2 回路と複素指数関数表示

回路の入力$v_i(t)$が cos 関数の場合、式(1.19)の微分方程式は簡単に解くことができ、これに対する応答$i(t)$を容易に求めることができる。（sin 関数であっても初期位相を適当に与えれば cos 関数で現される)。応答$i(t)$を求める一つの方法として、cos 関数をそのまま用いるのではなく、複素指数関数表示を用いる。すなわち、



$$v_i(t) = |V|\cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}\left[Ve^{j\omega t}\right] \tag{1.21}$$

と考える。ただし、θは複素数Vの偏角$\theta = \arg[V]$である。

式(1.19)に、$v_i(t) = \mathrm{Re}\left[Ve^{j\omega t}\right]$、$i(t) = \mathrm{Re}\left[Ie^{j\omega t}\right]$を代入して整理すると次の式を得る。

$$L\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[Ie^{j\omega t}\right] + R\,\mathrm{Re}\left[Ie^{j\omega t}\right] - \mathrm{Re}\left[Ve^{j\omega t}\right] = 0 \qquad (1.22)$$

ここで、微分演算の部分を考えてみる。微分の定義に従って演算を実行すると次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[Ie^{j\omega t}\right] = \frac{d}{dt}|I|\cos(\omega t+\varphi) = -\omega|I|\sin(\omega t+\varphi) \qquad (1.23)$$

一方、まず微分演算を行い、その後に結果の実部をとることにすると、次のようになる。

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}Ie^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[I\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[j\omega Ie^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[j\omega|I|e^{j\omega t+\varphi}\right]\\&= \mathrm{Re}\left[j\omega|I|\left(\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)\right)\right] = -\omega|I|\sin(\omega t+\varphi)\end{aligned} \qquad (1.24)$$

式(1.23)と式(1.24)は等しい結果を与える。すなわち、微分演算と実数部をとるという操作は順番を入れ替えてもよい。

式(1.22)にこのことを用いると、L、R が実数であることに注意すれば、次のようにまとめることができる。ただし、複素数V やI は時間によらず一定 (定常的) であることに注意する。

$$\mathrm{Re}\left[L\frac{d}{dt}Ie^{j\omega t} + RIe^{j\omega t} - Ve^{j\omega t}\right] = 0$$

$$\mathrm{Re}\left[j\omega LIe^{j\omega t} + RIe^{j\omega t} - Ve^{j\omega t}\right] = 0$$

$$\mathrm{Re}\left[(j\omega LI + RI - V)e^{j\omega t}\right] = 0 \qquad (1.25)$$

複素数V やI は時間によらず一定であるから、式(1.25)が時刻t によらずいつも成り立つためには次の関係式が成り立たなくてはいけない。

$$j\omega LI + RI - V = 0$$

つまり、

$$I = \frac{1}{R + j\omega L}V \qquad (1.26)$$

したがって、応答(電流$i(t)$)は次のようにして求まる。

$$i(t) = \mathrm{Re}\left[Ie^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{R+j\omega L}Ve^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}e^{j\varphi}Ve^{j\omega t}\right] = \frac{|V|}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\mathrm{Re}\left[e^{j(\omega t+\theta+\varphi)}\right]$$

$$\therefore i(t) = \frac{|V|}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t+\theta+\varphi) \qquad (1.27)$$

ここで、$\varphi = -\tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$ である。

式(1.21)の入力(電圧) $v_i(t)=|V|\cos(\omega t+\theta)$ と、これに対する回路の応答 $i(t)=\dfrac{|V|}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t+\theta+\varphi)$ を比べると、次のことがわかる。

・応答の大きさ(振幅)は入力振幅と $\dfrac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$ の積で決まる。

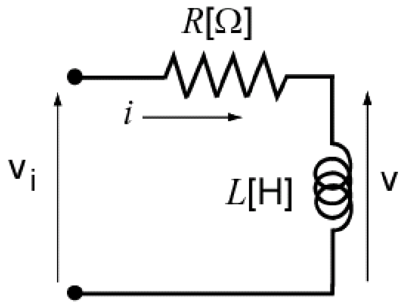
———> $\dfrac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$ は複素数 $\dfrac{I}{V}$ の大きさ

・応答の位相と入力の位相を比較すると $\varphi=-\tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$ だけ変化している。

———> $\varphi=-\tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$ は複素数 $\dfrac{I}{V}$ の偏角

つまり、$\dfrac{I}{V}$ を求めると、回路の定常的な応答(電流 $i(t)$)と入力(電圧 $v_i(t)$)の関係が分かる。$K(j\omega)=\dfrac{I}{V}$ をこの場合の伝達関数(応答と入力の関係を結びつける関数)ということができる。ここで、$K(j\omega)$ は ω の関数であることに注意する。

1-4-3 任意の周期波に対する回路の応答



さて、回路が線形システムであることが示されている。また、任意の周期関数はフーリエ級数によって式(1.16)のように展開されることも分かっている。とすると、任意の周期波 $v_i(t)$ を入力として与えた場合の応答は、次のように考えれば求めることができる。

(i)入力をフーリエ級数によって正弦関数で展開

入力は実関数で与えられるので、次のように表すことができる。

$$v_i(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left[c_n e^{jn\omega t}\right] \tag{1.28}$$

(ii) 展開された正弦関数ごとに応答を求める

回路の応答は、伝達関数 $K(j\omega)$ を用いて正弦関数の周波数成分 $\mathrm{Re}\left[c_n e^{jn\omega t}\right]$ ごとに $\mathrm{Re}\left[c_n K(j\omega)e^{jn\omega t}\right]$ で与えられる。

(iii)各周波数成分の応答の和を求める

回路の線形性により、入力 $v_i(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left[c_n e^{jn\omega t}\right]$ に対する応答は、各周波数成分に対する応答の線形和で与えられるから、次のようになる。

$$i(t)=c_0K(j0)+\sum_{n=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left[c_n K(j\omega)e^{jn\omega t}\right] \tag{1.29}$$