

アンペールの法則

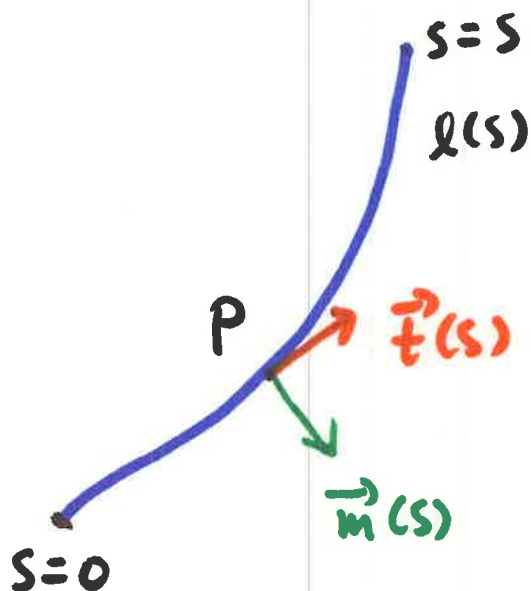
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



参考 Gauss の法則

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

幾何学



接線

$$\vec{t}(s) = \frac{dl}{ds} \dots \textcircled{1}$$

法線

$$\vec{n}(s)$$

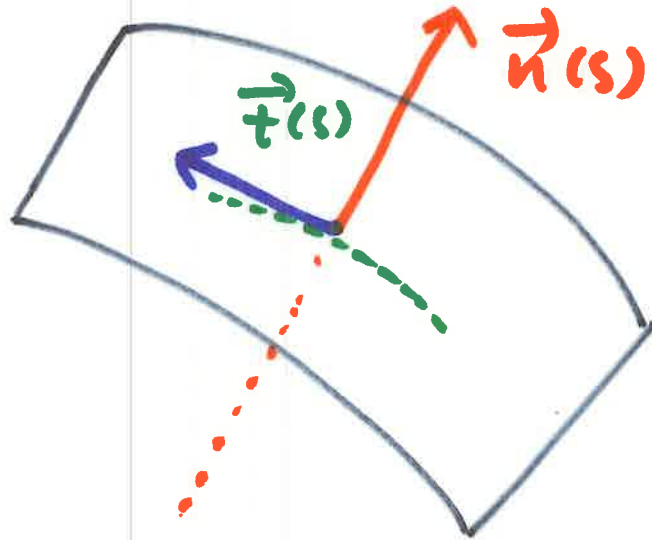
$$\vec{n}(s) \cdot \vec{t}(s) = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s) = 1 \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{d\vec{t}(s)}{ds} \cdot \vec{t}(s) + \vec{t}(s) \cdot \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = 0 \dots \textcircled{3}'$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}'$

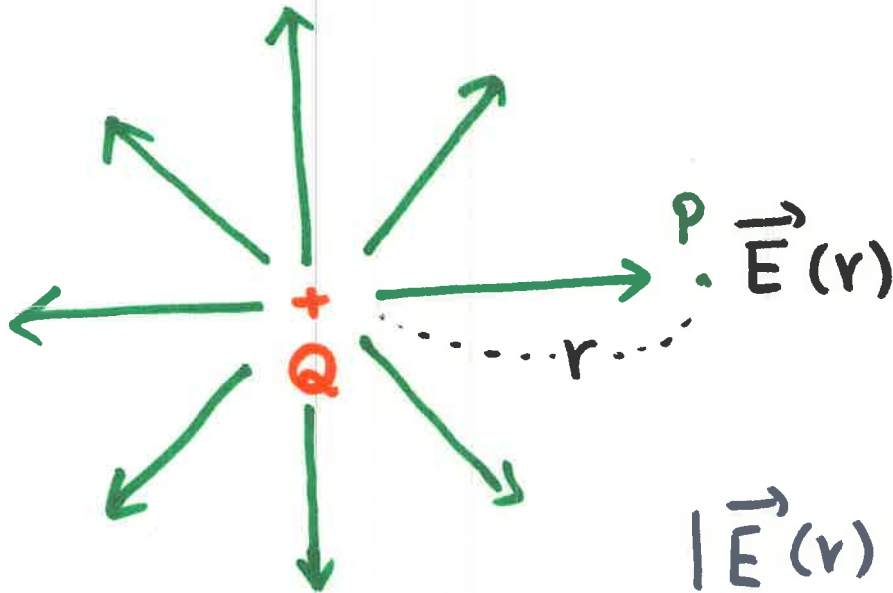
$$\vec{n}(s) \propto \frac{d\vec{t}(s)}{ds}$$



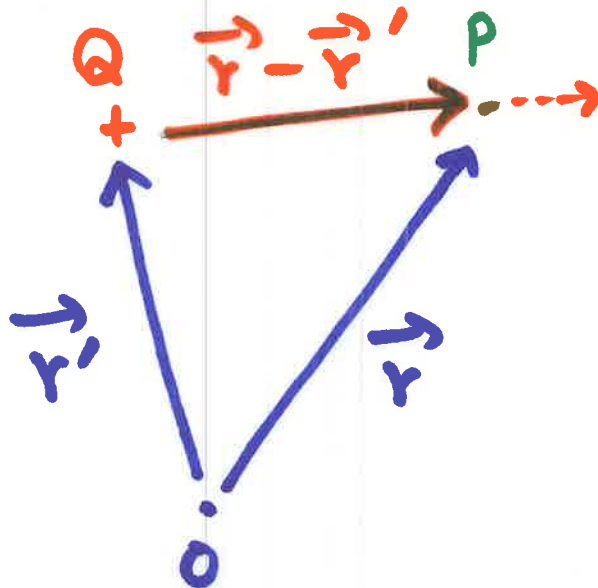
$\vec{n}(s)$: 面垂直ベクトル

Gauss の法則

電界 $\vec{E}$



$$|\vec{E}(r)| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

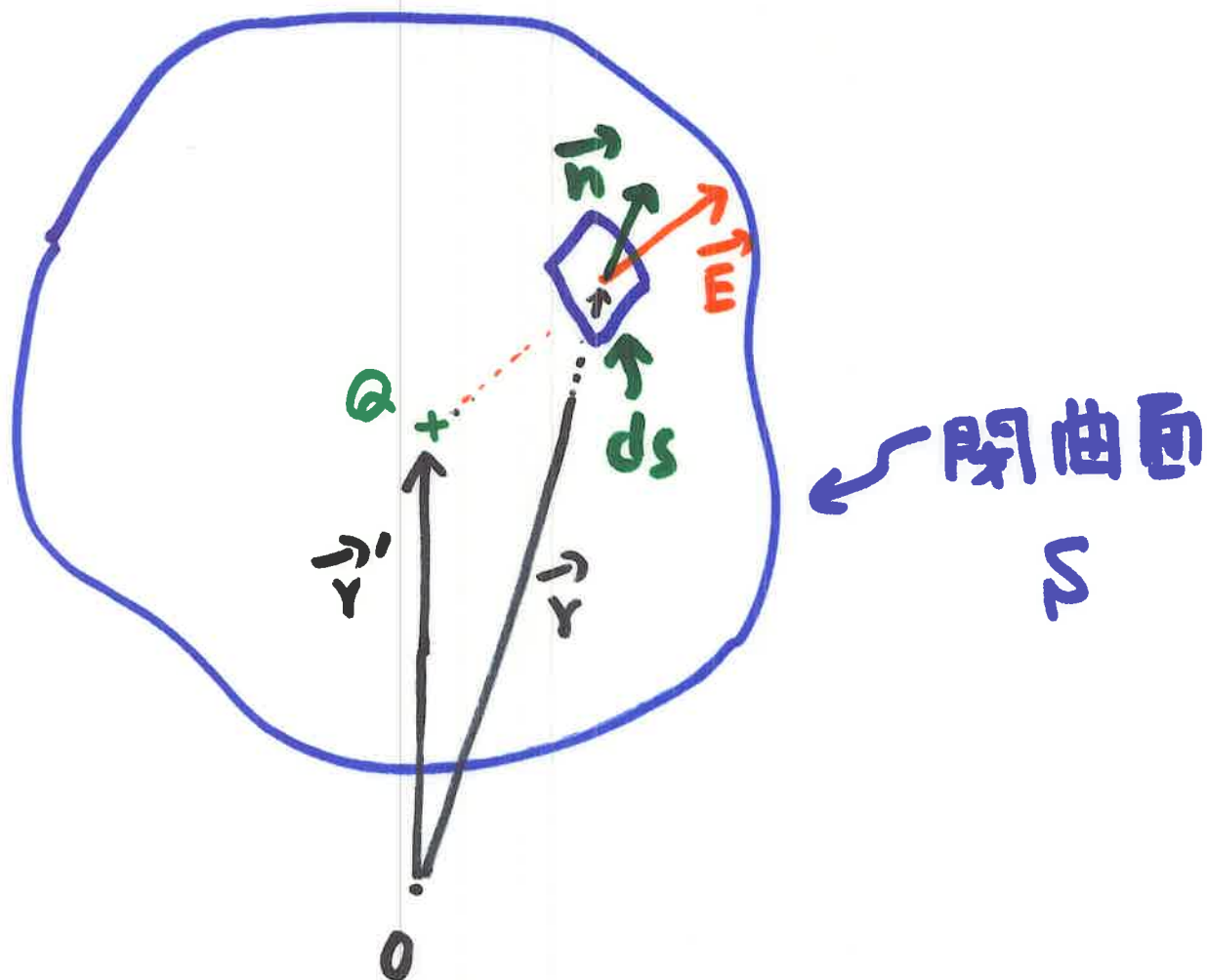


$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

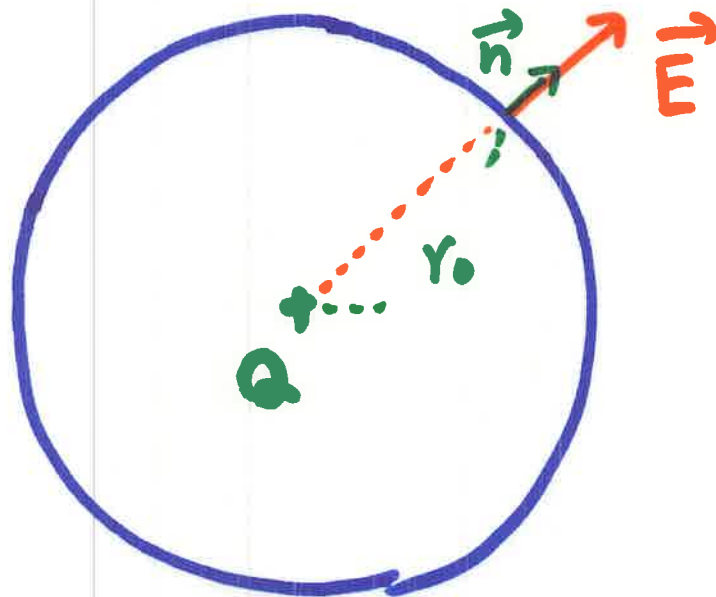
P.点の電界

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

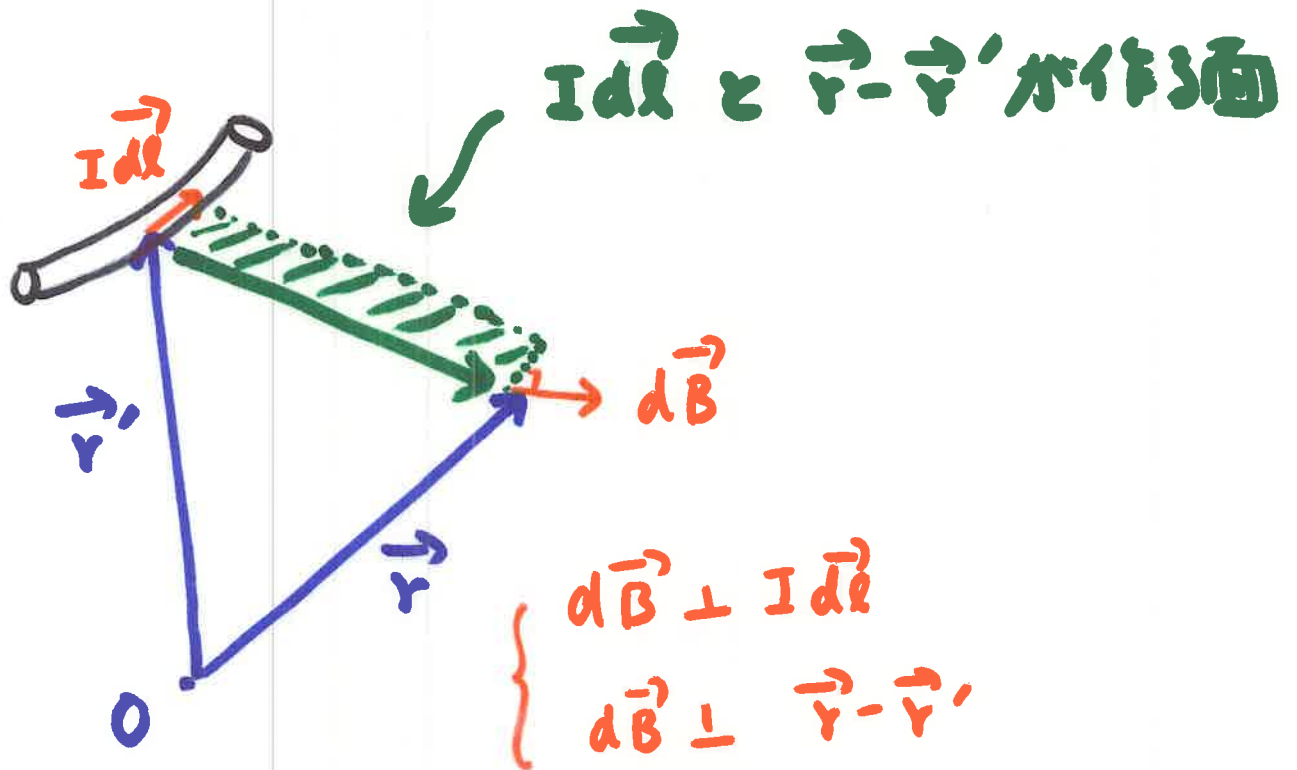


王求 $\vec{n}, \vec{E}$ の方向は一致

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = E$$

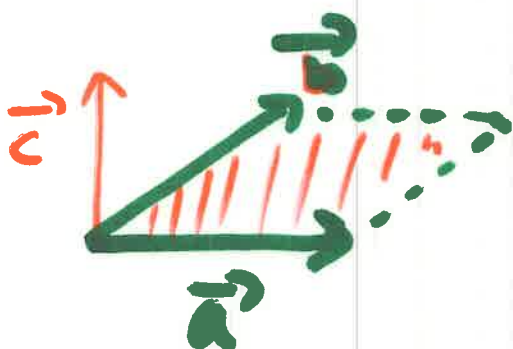
$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$$

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_S E dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \cdot 4\pi r_0^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

磁界

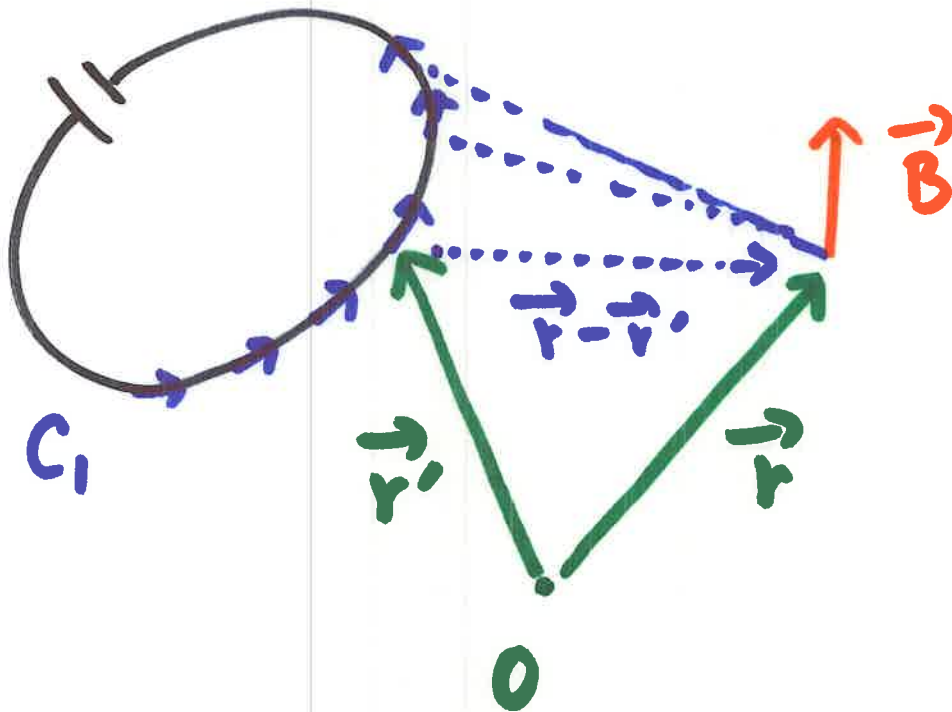
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Biot-Savart の法則



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

ル-フ・電流



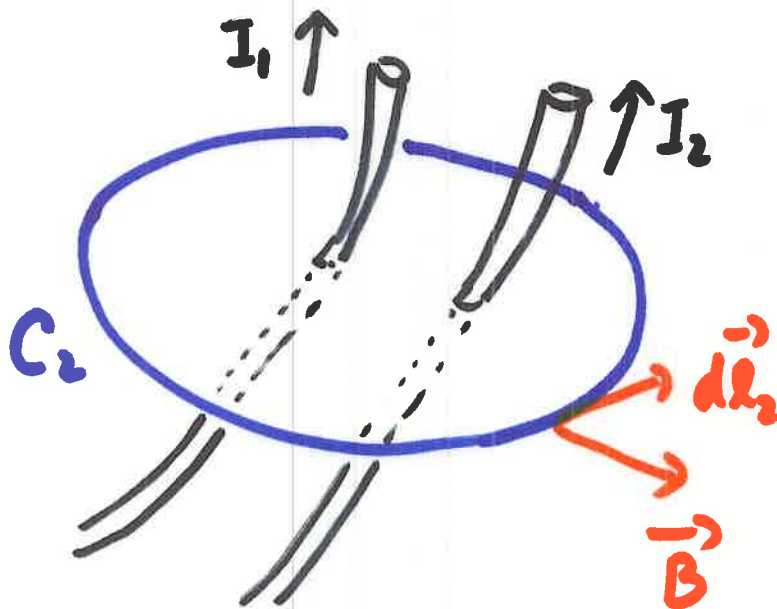
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I d\vec{r} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

ビオサバールの法則

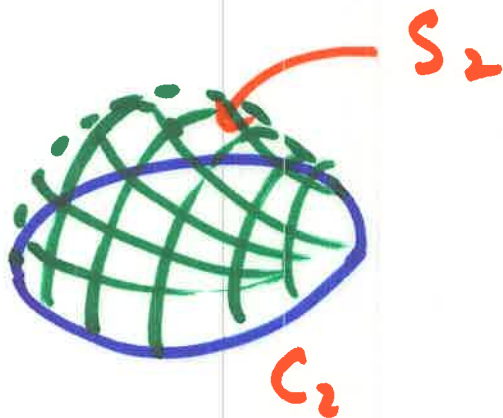
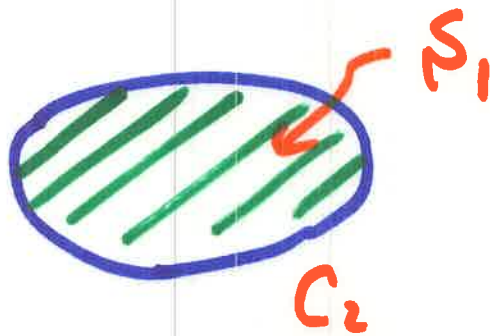
アンペアの法則

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = \mu_0 \sum_i I_i$$

$$= \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

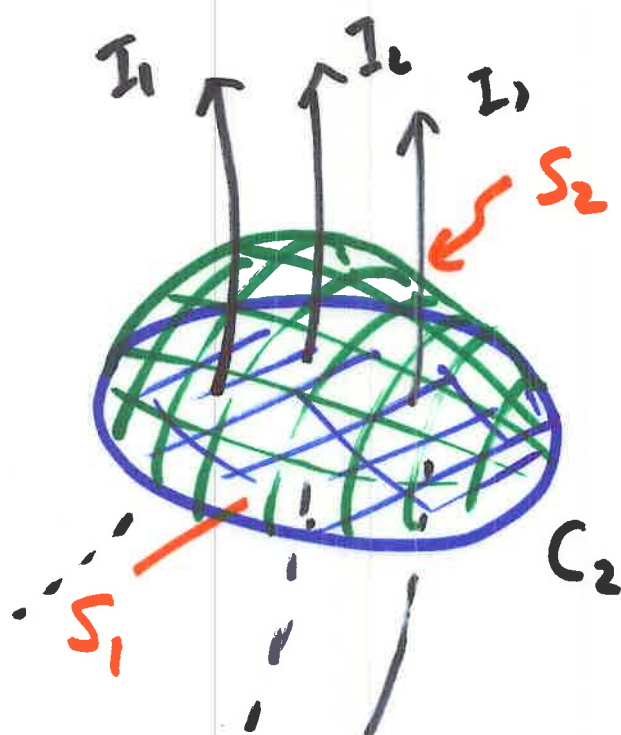


空間の中の任意の閉ループ
に沿って $\vec{B}$ を線積分した値は、
そのループをふちとする面を貫く
全電流密度に等しい。



C_2 をふちとする閉曲面 S_1, S_2

S_1 と S_2 は異なるが
貫く電流は同じ



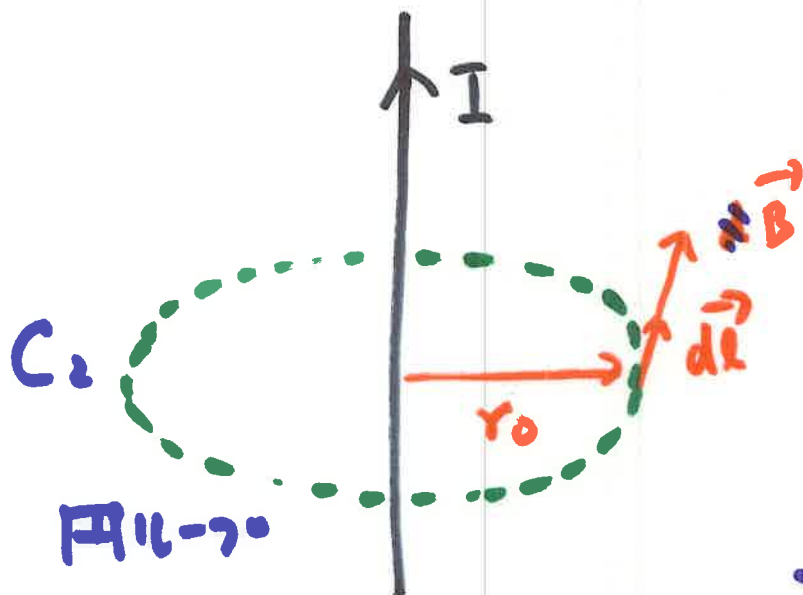
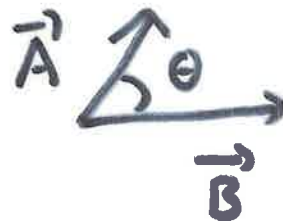
S_1 と S_2 閉曲面を置いて
流れる電流は同じ

アンペアの法則

⑨

最も簡単な例

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$



円周上

接線方向

$\vec{B}$: 磁束密度

・方向

$$\vec{B} \parallel d\vec{l} \quad (\theta = 0)$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$$

・大きさ

$|\vec{B}|$ は円周に沿って
同じ

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{C_1} B dl = B \oint_{C_1} dl = B(2\pi r_0) = \mu_0 I$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_0}$$

ビオ・サバールの法則 (Biot-Savartの法則)



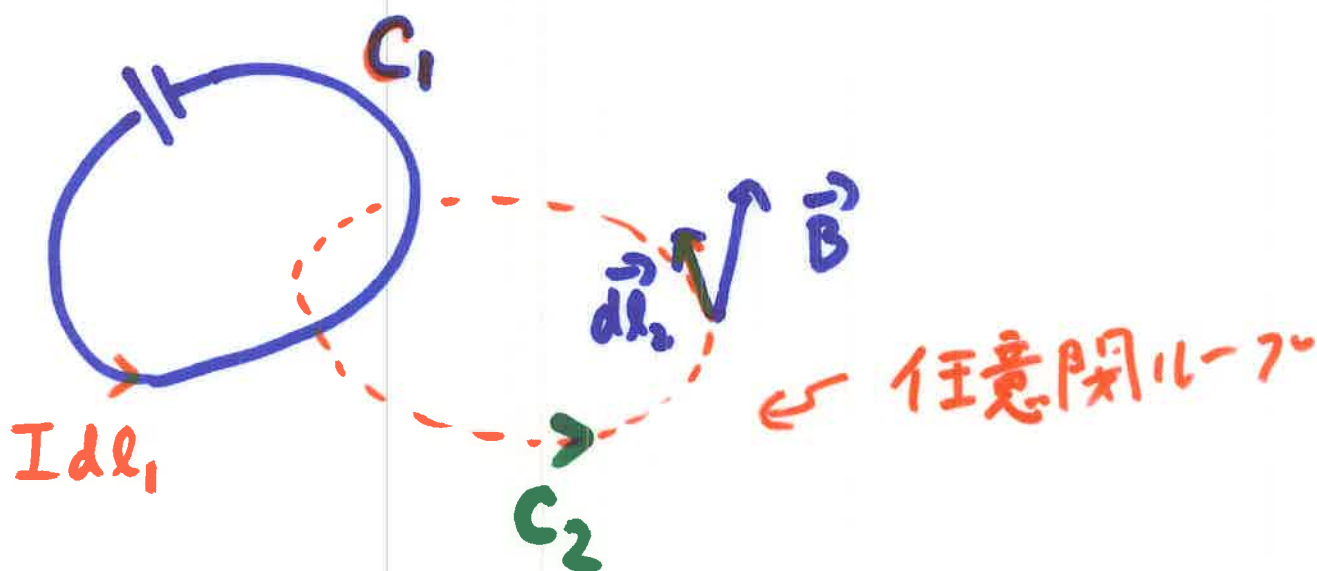
アンペールの法則 (Ampereの法則)

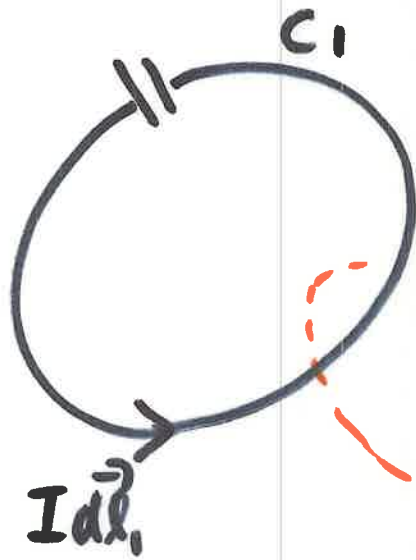
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I d\vec{l}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



?

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = \mu_0 I$$





電流を取り囲む
ループ C_2

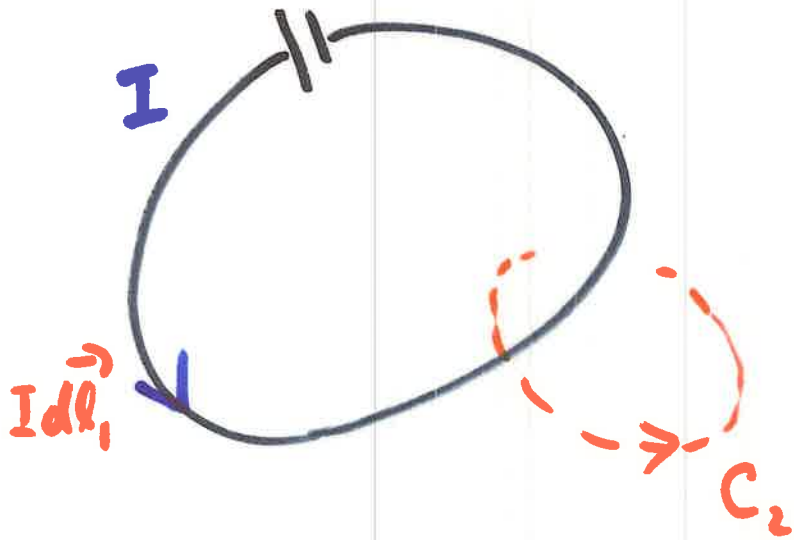


電流を
取り囲まない
ループ

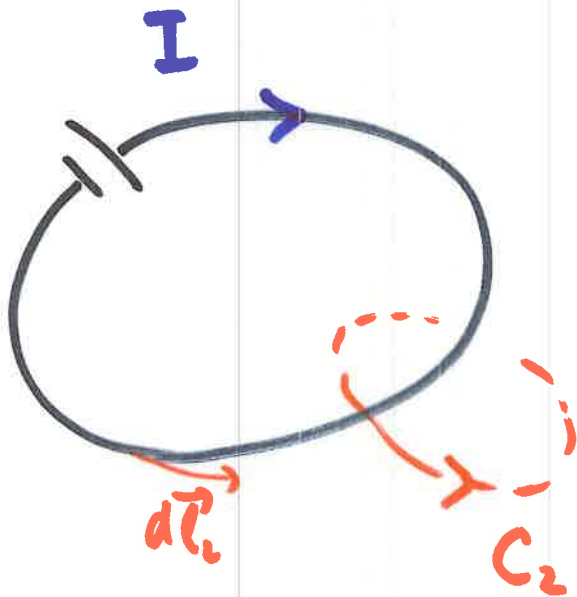
$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = I$$

$$\oint_{C_2'} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = 0$$

②'

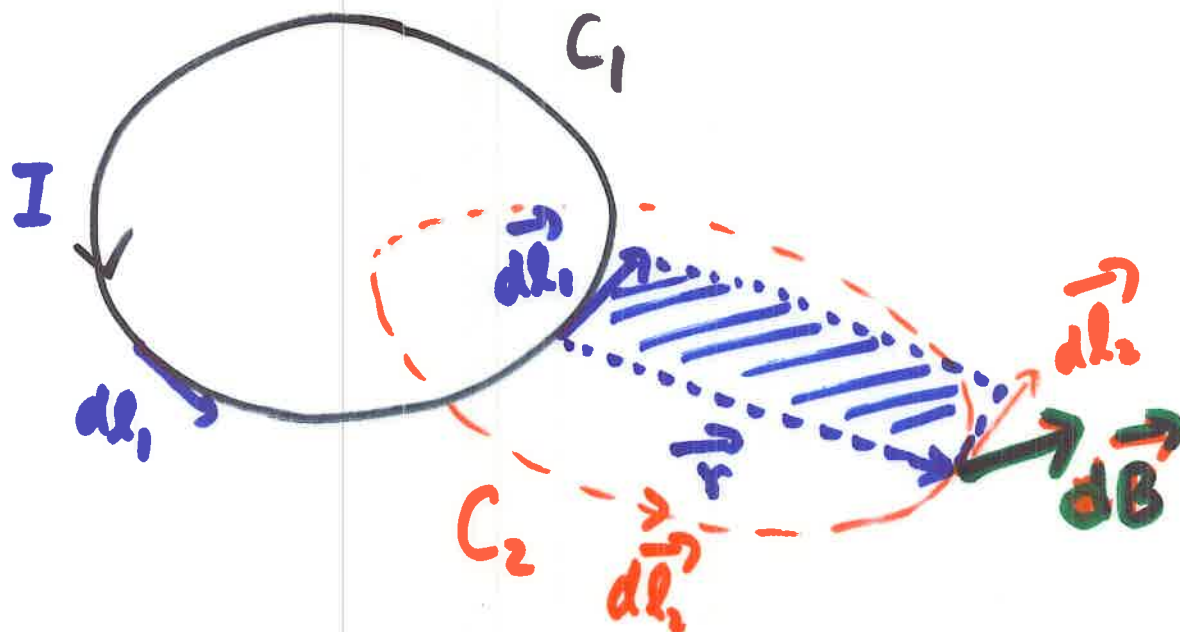


$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_2 = I$$



$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_1 = -I$$

→ Ampere の法則

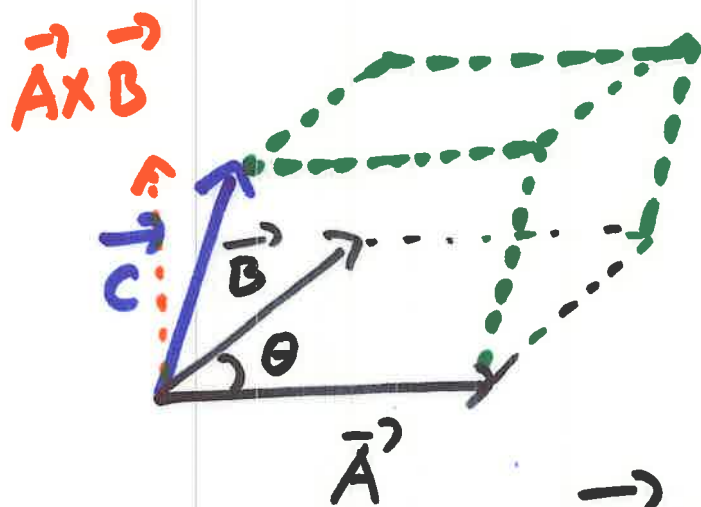


$$\vec{dB} \perp (I d\vec{l}_1, \vec{r})$$

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I d\vec{l}_1 \times \vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{l}_2$$

$$(d\vec{l}_1 \times \vec{r}) \cdot d\vec{l}_2 \Rightarrow ?$$



$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

$$V = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

体積 !!

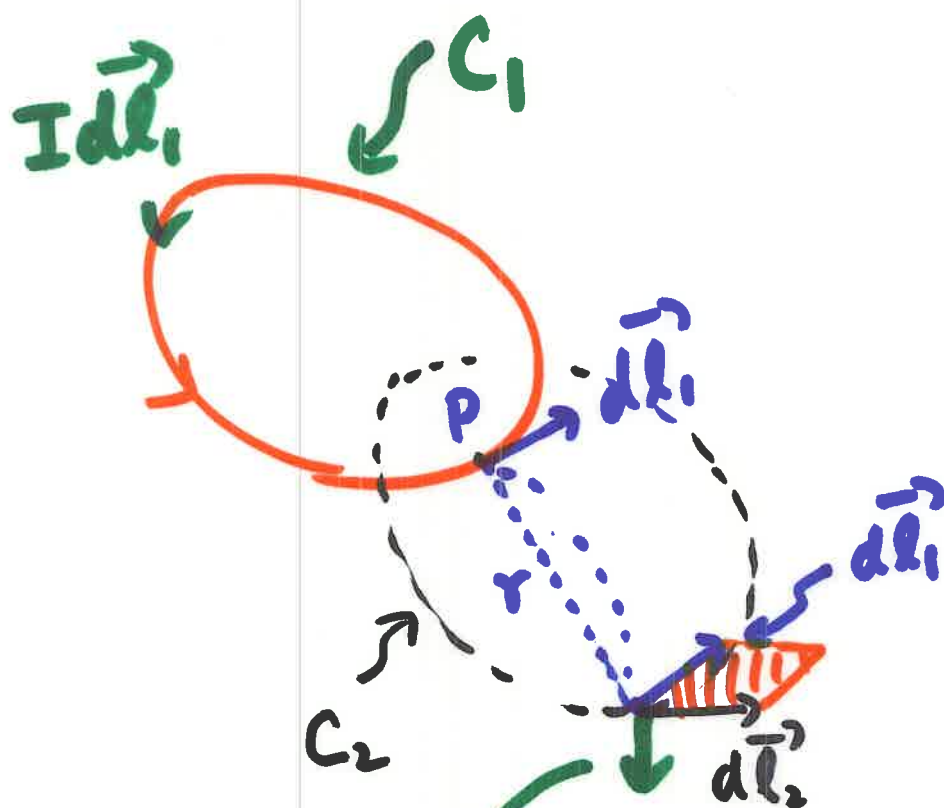
$$= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

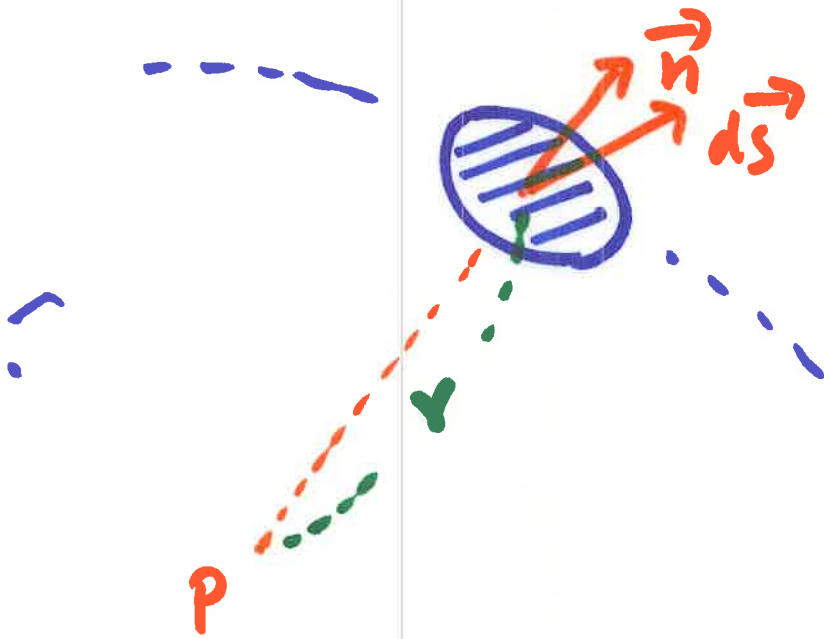
$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I d\vec{l}_1 \times \vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{l}_2$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1}{r^3} \cdot \vec{r}$$



$d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1$ は $d\vec{l}_1, d\vec{l}_2$ の作る面に垂直



$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$d\vec{s} = d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1$$

$$d\Omega = \frac{\vec{ds} \cdot \vec{n}}{r^2}$$

$$= \frac{\vec{ds} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$d\vec{s} = d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1$$

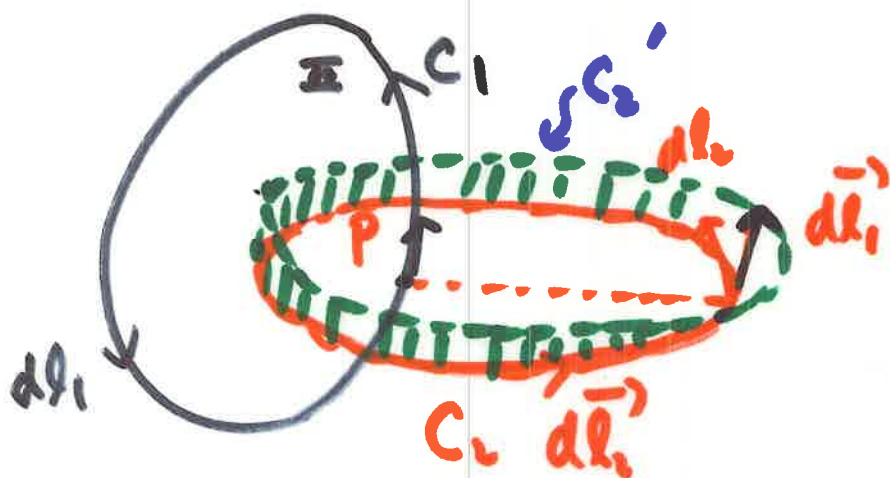
$$\begin{aligned}
 & \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I d\vec{l}_1 \times \vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{l}_2 \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} (\Omega_2 - \Omega'_2)_{(p' \rightarrow p)}
 \end{aligned}$$

$$\oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}}{r^3}$$

= P点からリング全面積を見た
立体角

= C_2 の面の立体角

- C'_2 の面の立体角



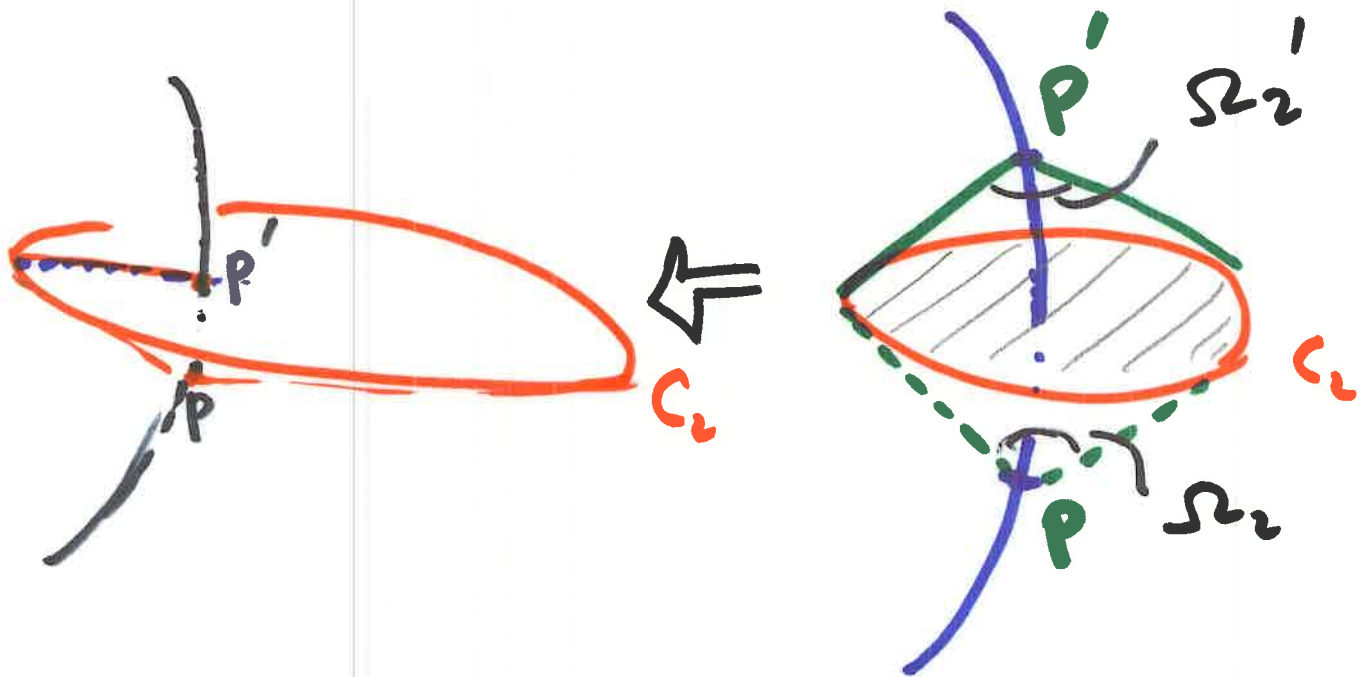
$$\oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \times d\vec{\ell}_1 \cdot \vec{r}}{r^3}$$

= 点 P から見た C_2 の立体角

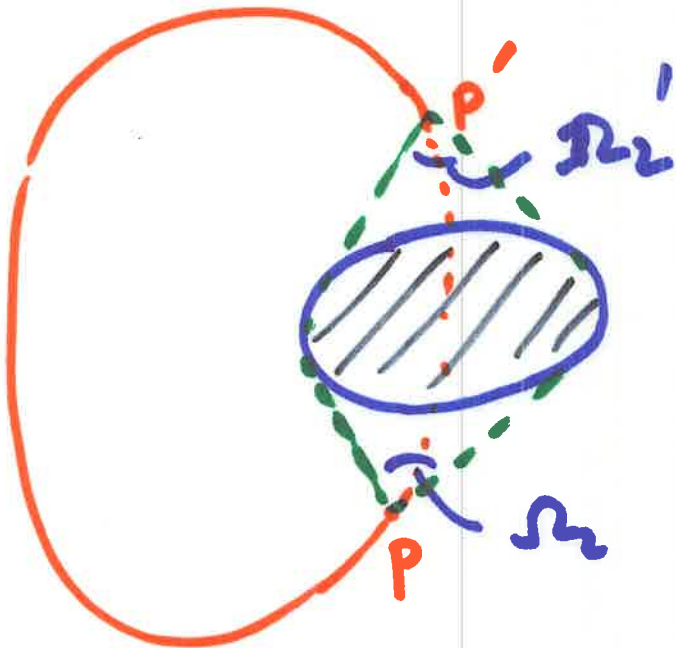
- 点 P' から見た C_2 の立体角

$$= \Omega_2 - \Omega_2'$$

$$= (2\pi) - (-2\pi) = 4\pi$$



$$\begin{aligned}
& \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_2 \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{\ell}_2 \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \times d\vec{\ell}_2 \cdot \vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1 (P' \rightarrow P)} (\Omega_2 - \Omega_2') = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (2\pi - (-2\pi)) \\
&= \mu_0 I
\end{aligned}$$



$$\therefore \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_2 = \mu_0 I$$

ベクトルポテンシャル

①

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi \\ (\text{rot } \vec{E} &= 0) \quad (\vec{E} = -\text{grad } \phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ (\text{div } \vec{B} &= 0)\end{aligned}$$

$\vec{A}$: vector potential

任意性

$$\left\{ \begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi + \phi_0 \text{ (スカラー)} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi\end{aligned}\right.$$

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla \phi}_{=0} = \nabla \times \vec{A}$$

Vector potential の基本方程式

⑦

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \dots \textcircled{2}$$

② $\rightarrow$ ①

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$\nabla \cdot \vec{A} = 0$ を満たすベクトル
ポテンシャル

クーロニゲージ

$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{i}$$



$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} A_x = -\mu_0 i_x$$

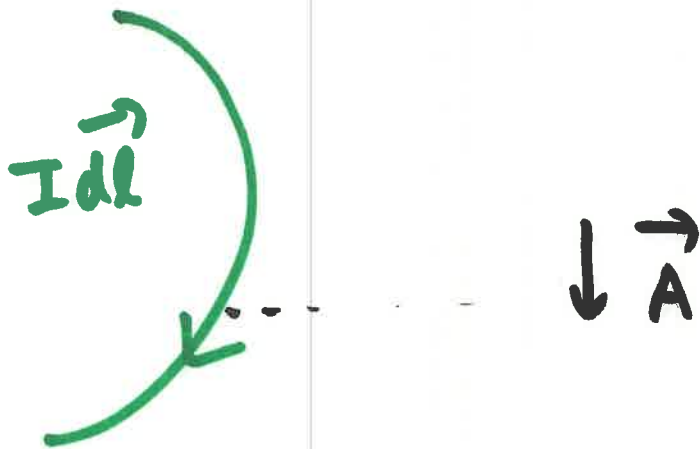
$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} A_y = -\mu_0 i_y$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} A_z = -\mu_0 i_z$$



$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \Phi = \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r} d\tau$$



$$\vec{A} = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} d\tau}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}}{r}$$

$$\vec{j} \rightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{B}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$