

電磁氣學 II (a)

岩 本 光 正

教科書

電磁氣學

末松安晴

共立出版

① $10/2$

② $10/9$

③ $10/16$

4 $10/23$ 工大祭

5 $10/30$ 休講

⑥ $11/6$

⑦ $11/13$

⑧ $11/20$

⑨ $11/27$

⑩ $12/4$ Δ

⑪ $12/11$

⑫ $12/17$ Δ

⑬ $1/8$

~~14~~ $1/15$ センター
入試

⑮ $1/22$

⑯ $1/29$

電磁気学 II

静電気現象
(電磁気 I)

電磁気現象

Maxwell の方程式

磁気現象
(電磁気 II)

電磁気 II

• 靜止電荷

• 位置

•
+Q

電子

$$\left\{ \begin{array}{l} e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \\ m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \end{array} \right.$$

• 動的な電荷 $\Rightarrow$ 電流

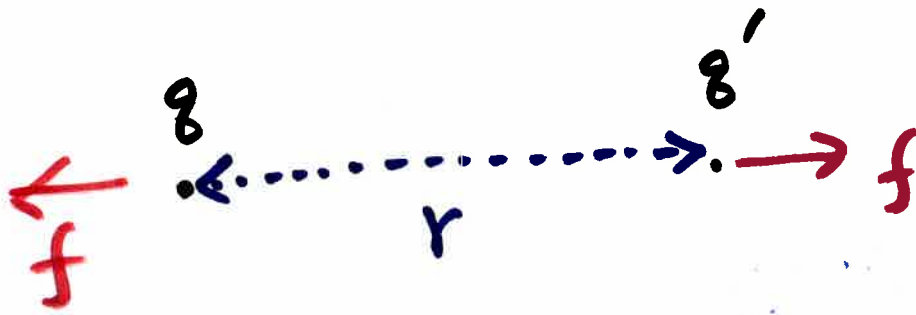
•
+Q $\xrightarrow{\quad}$
v

$$\vec{j} = Q \vec{v}$$

③

静電気現象の基礎

・ クーロンの法則



$$f = k_0 \frac{qq'}{r^2}$$

k_0 : 定数

⇒ 静電気作用は 遠距離作用?

(q と q' の間の空間の働きは考えない)

④



$$f = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) q'$$

ϵ_0 : 真空誘電率

$$8.854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$$

⇒ "真空は電氣的性質がある"

"近接作用"

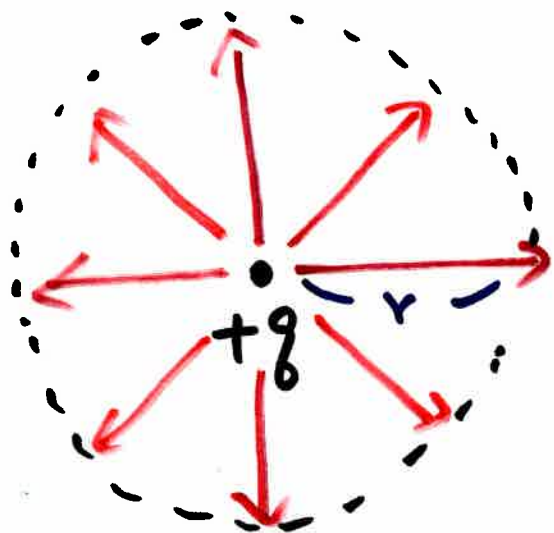
• Faraday

q と q' の間の空間にある働きがある。

⑤

$$f = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \right) q'$$

$$= q' E(r)$$

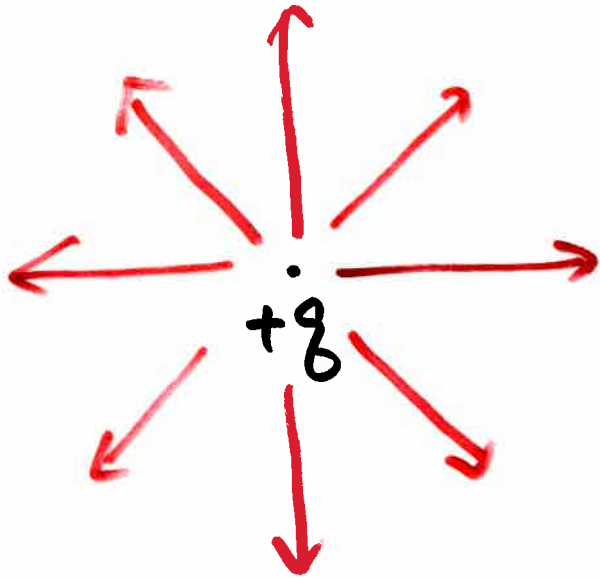


$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

f の力は, $E(r)$ という大きさの場 (field) に $+q'$ が置かれたために働いた.

⑥

ベクトル表現



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}$$

unit vector

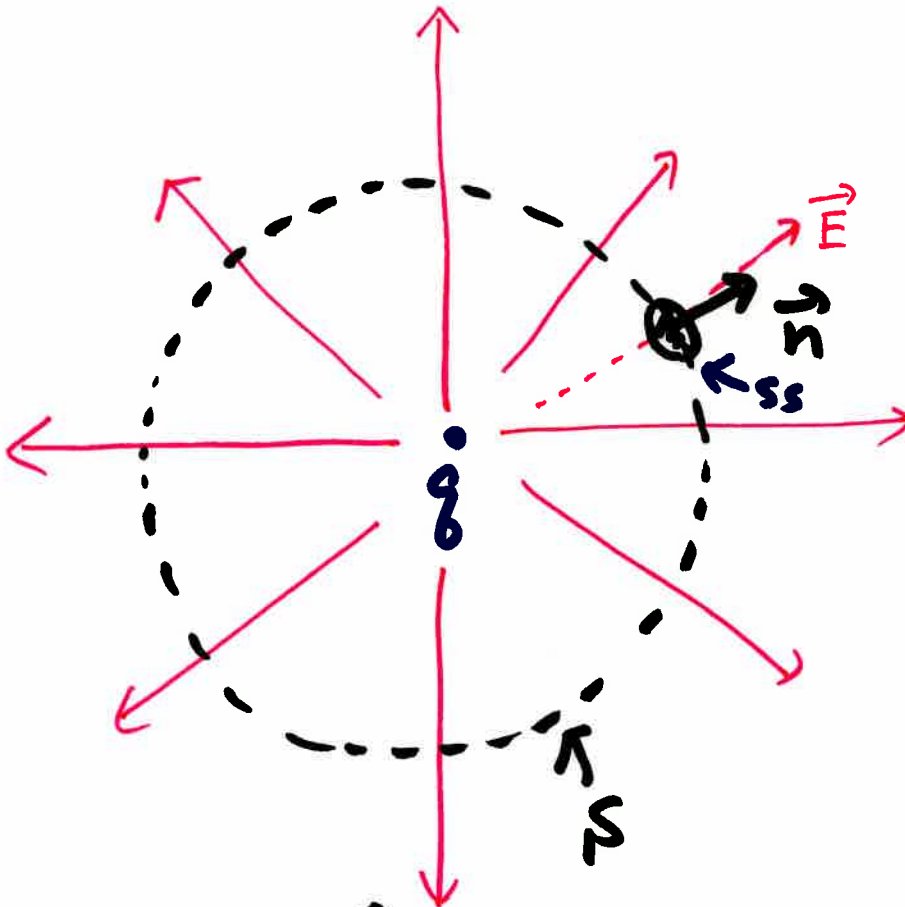
$$\vec{f} = q' \vec{E}(\vec{r})$$

$\vec{E}(\vec{r})$: 発散する field がある。

Gauss の法則

積分系

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

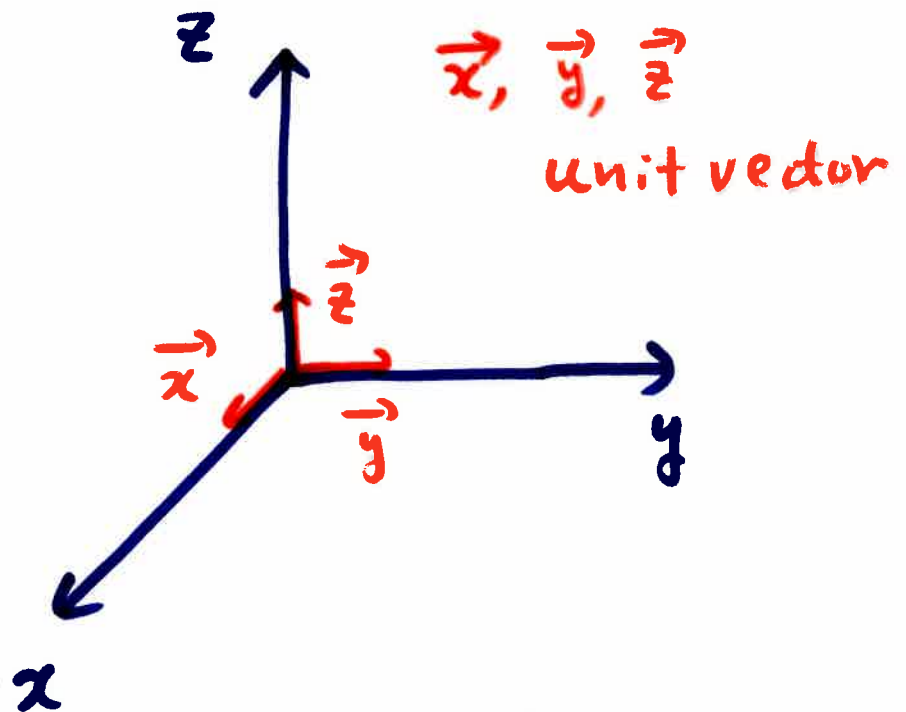


微分

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0})$$

⑦'

$$\nabla = \vec{x} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z} \frac{\partial}{\partial z}$$



$$\vec{E} = E_x \vec{x} + E_y \vec{y} + E_z \vec{z}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \left(\vec{x} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\cdot (E_x \vec{x} + E_y \vec{y} + E_z \vec{z})$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

⑧

Potential 場

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (= -\text{grad } \phi)$$

$\phi(x, y, z)$: スカラー量

$$\vec{E} = -\left(\vec{x} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z} \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi$$

$$= -\vec{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \vec{y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \vec{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} //$$

$$\therefore \vec{E} = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) //$$

$\vec{E}$ の性質

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

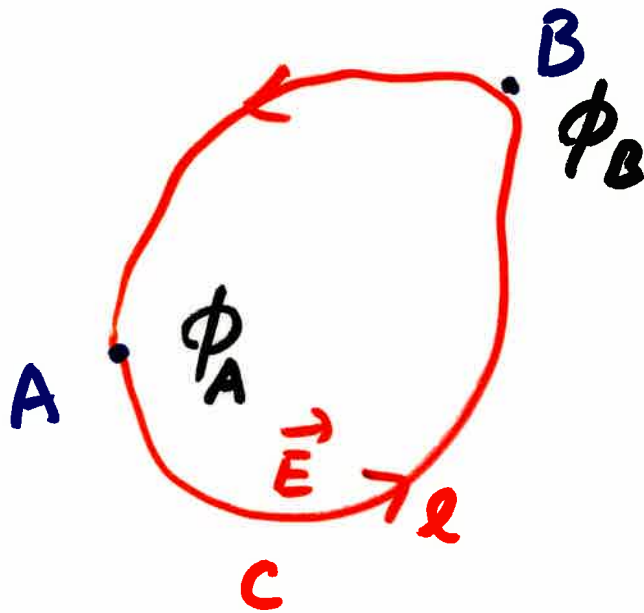
(渦なし場)

⑧

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$



$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

⑧''

$$\nabla \times \vec{E}$$

$$= (\vec{x} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z} \frac{\partial}{\partial z}) \times (E_x \vec{x} + E_y \vec{y} + E_z \vec{z})$$

$$= (\vec{x} \times \vec{x}) \frac{\partial E_x}{\partial x} + (\vec{x} \times \vec{y}) \frac{\partial E_y}{\partial x} + (\vec{x} \times \vec{z}) \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$+ (\vec{y} \times \vec{x}) \frac{\partial E_x}{\partial y} + (\vec{y} \times \vec{y}) \frac{\partial E_y}{\partial y} + (\vec{y} \times \vec{z}) \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

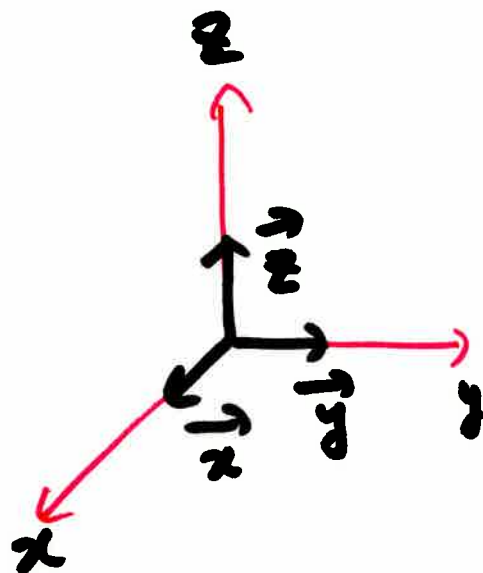
$$+ (\vec{z} \times \vec{x}) \frac{\partial E_x}{\partial z} + (\vec{z} \times \vec{y}) \frac{\partial E_y}{\partial z} + (\vec{z} \times \vec{z}) \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{x}$$

$$+ \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{y}$$

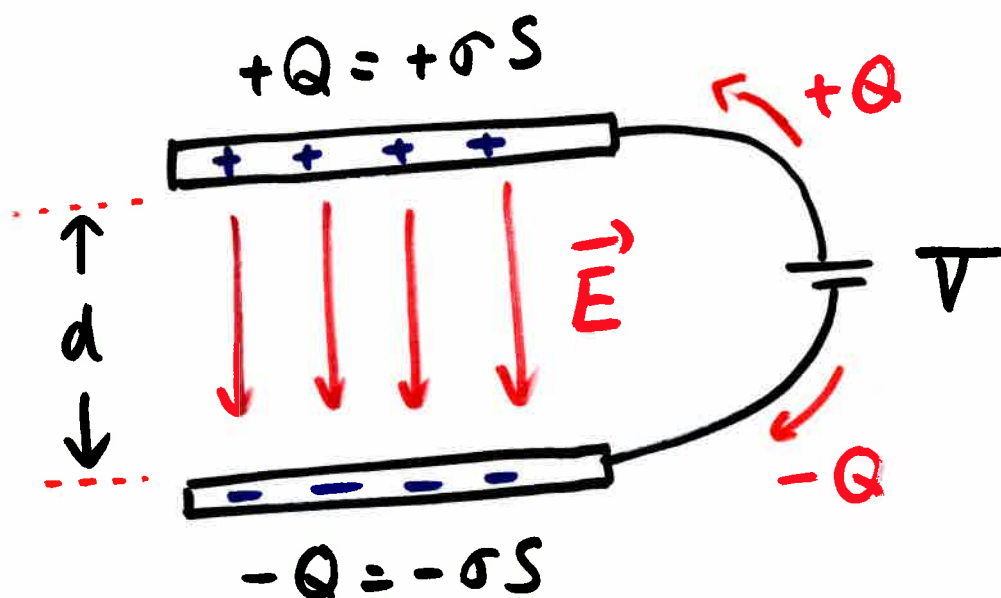
$$+ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{z}$$

$$= 0 \quad \left(\leftarrow E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$



⑨

真空はどんな静電的性質を持つ場か?



$$E = \frac{V}{d}$$

$Q \rightarrow \vec{E}$
Gauss 則

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \epsilon_0 E \quad (\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0})$$

電極に蓄積される量は"真空"の性質で定まる

$$Q = \epsilon_0 E S$$

$$= \epsilon_0 \frac{S}{d} V$$

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

↑
"真空"

設計パラメータ

誘電体

$$\epsilon_0 \longrightarrow \epsilon$$

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad : \quad \text{比誘電率}$$

"真空"の電気的性質が基準

材料の性質

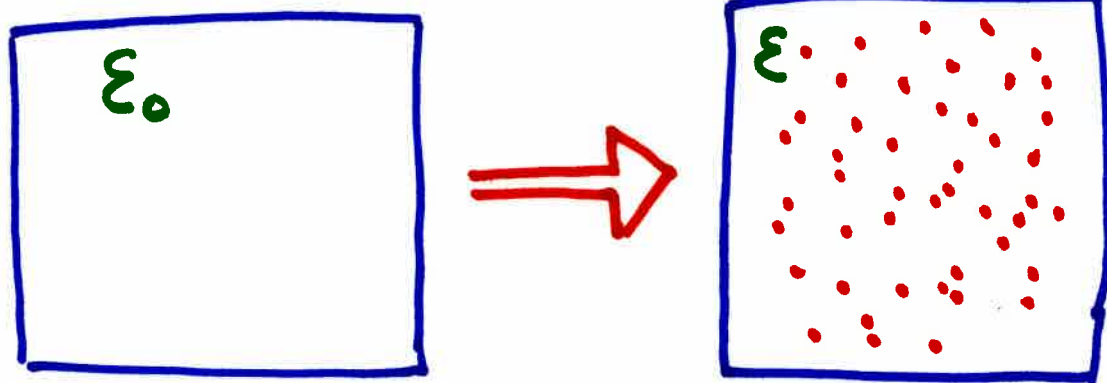
"真空" を基準

例: 誘電率

真空誘電率 ϵ_0

材料の比誘電率 ϵ_r

→ 材料の誘電率 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$



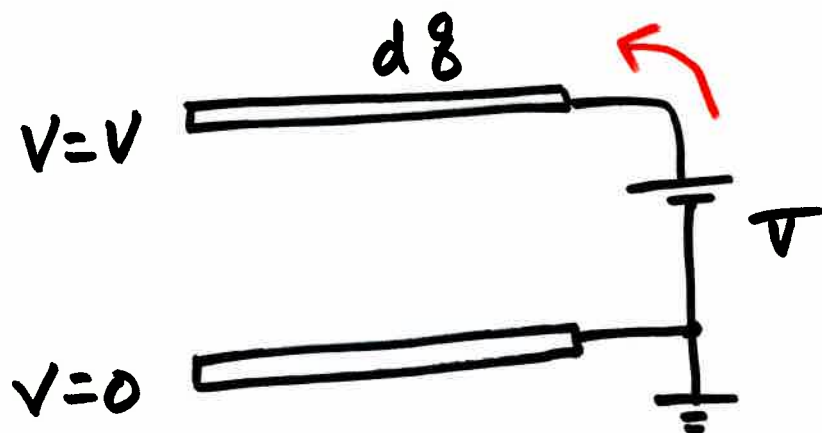
$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \rightarrow \epsilon_r$$

真空中に蓄積されるエネルギー

⑪

① 回路的発想

"Black Box"
(外から見ると)



$$dW = V \cdot dq \quad \dots \textcircled{1}$$

$$dq = C dV \quad \dots \textcircled{2}$$

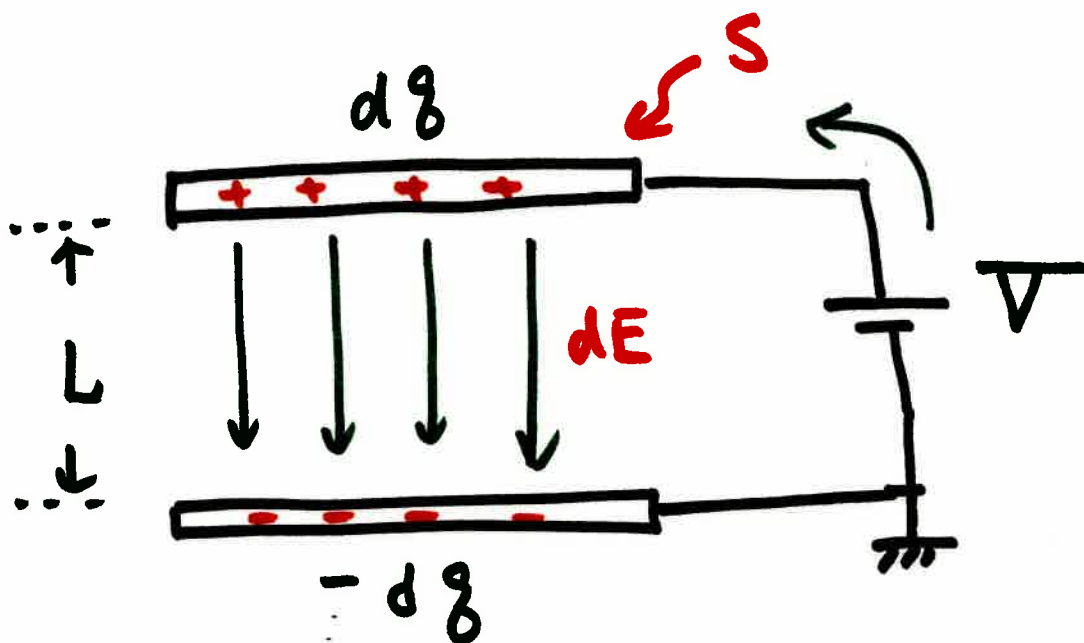
$$W = \int_0^Q V dq = C \int_0^V V \cdot dV = \frac{1}{2} C V^2$$

このエネルギーはどのように
蓄積されるか!!

②

キャパシタの真空中で
起きていること

⑫



$$dE = \frac{dq}{\epsilon_0 S}$$

$$E = \frac{V}{L}$$

dq の電荷による電界の変化 dE

$$dW = V \cdot dq = (EL) \cdot (\epsilon_0 dE) \cdot S$$

$$W = \left(\int_0^E \epsilon_0 E dE \right) \cdot SL$$

$$SL = \underset{\text{体積}}{V_0}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \cdot V_0$$

単位体積あたりの蓄積エネルギー

"真空とは何か、"

- ✓ 何もないということではない
- ✓ 何も性質を持たないということではない

・ 静電エネルギー蓄積



・ 場(静電場)を保有



・ 磁気エネルギーの蓄積



・ 磁場を保有

⇒ Maxwellの電磁方程式

①

導体と直流電流

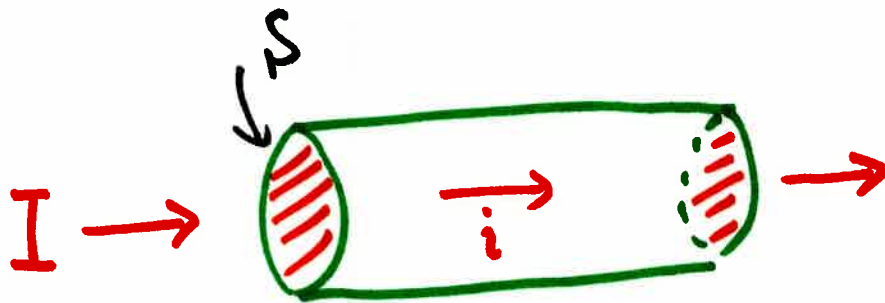
$$v \text{ [m/s]}$$

$$q \text{ [C]}$$

$$n_s \text{ [1/m}^3\text{]}$$

$$q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$i = q n_s v$$



$$I = i S$$

i 電流密度

$$[\text{A/m}^2]$$

・ ベクトル量

$$\vec{i} = q n_s \vec{v}$$

$\vec{i}$: (vector)

$$I = \iint_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

②

材料の性質

$$v = \mu E \quad \mu: \text{移動度}$$

$$[\mu] = \frac{[v]}{[E]} = \frac{[m/s]}{[V/m]} = [m^2/V \cdot s]$$

$$i = q n_s v$$

$\vec{f} = q \vec{E}$

force ↑ electric charge field

$$= q n_s \mu E = \kappa E$$

$$\kappa = q n_s \mu \quad : \text{導電率}$$

$$\rho = 1/\kappa \quad : \text{抵抗率}$$

$$[\kappa] = \frac{[i]}{[E]} = \frac{A/m^2}{V/m} = [V m^{-1}]$$

$$[\rho] = [\kappa]^{-1} = [\Omega \cdot m]$$

電子を動かす

-e に electric field
を加える!!

$$-e \rightarrow v$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \\ \vec{f} = -e\vec{E} \end{array} \right.$$

"真空中" と "材料中"

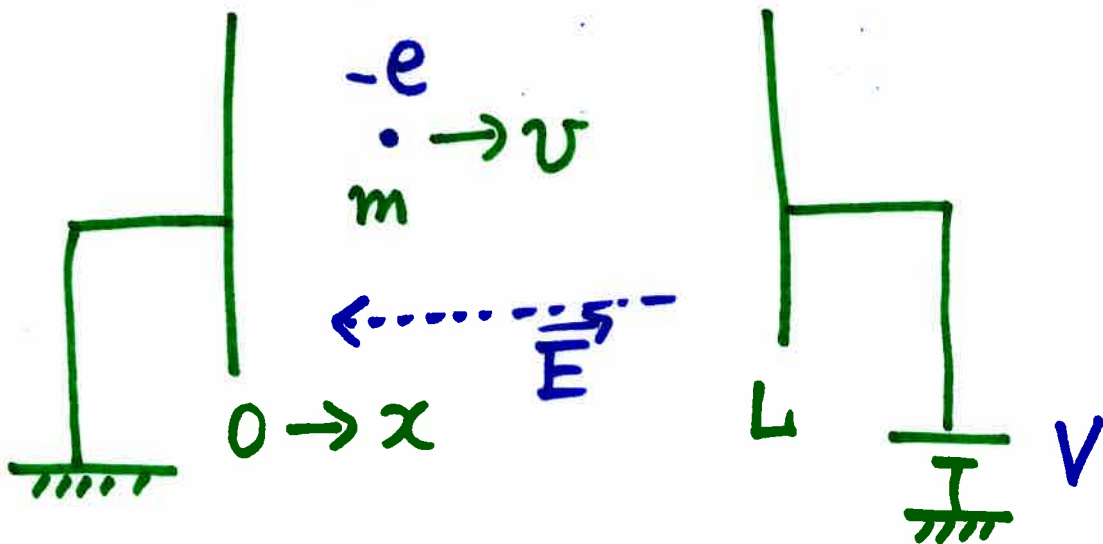
の 電子の動きの違いは?

材料中の電気伝導

"真空中" と "材料中" の
電子の動きの違い

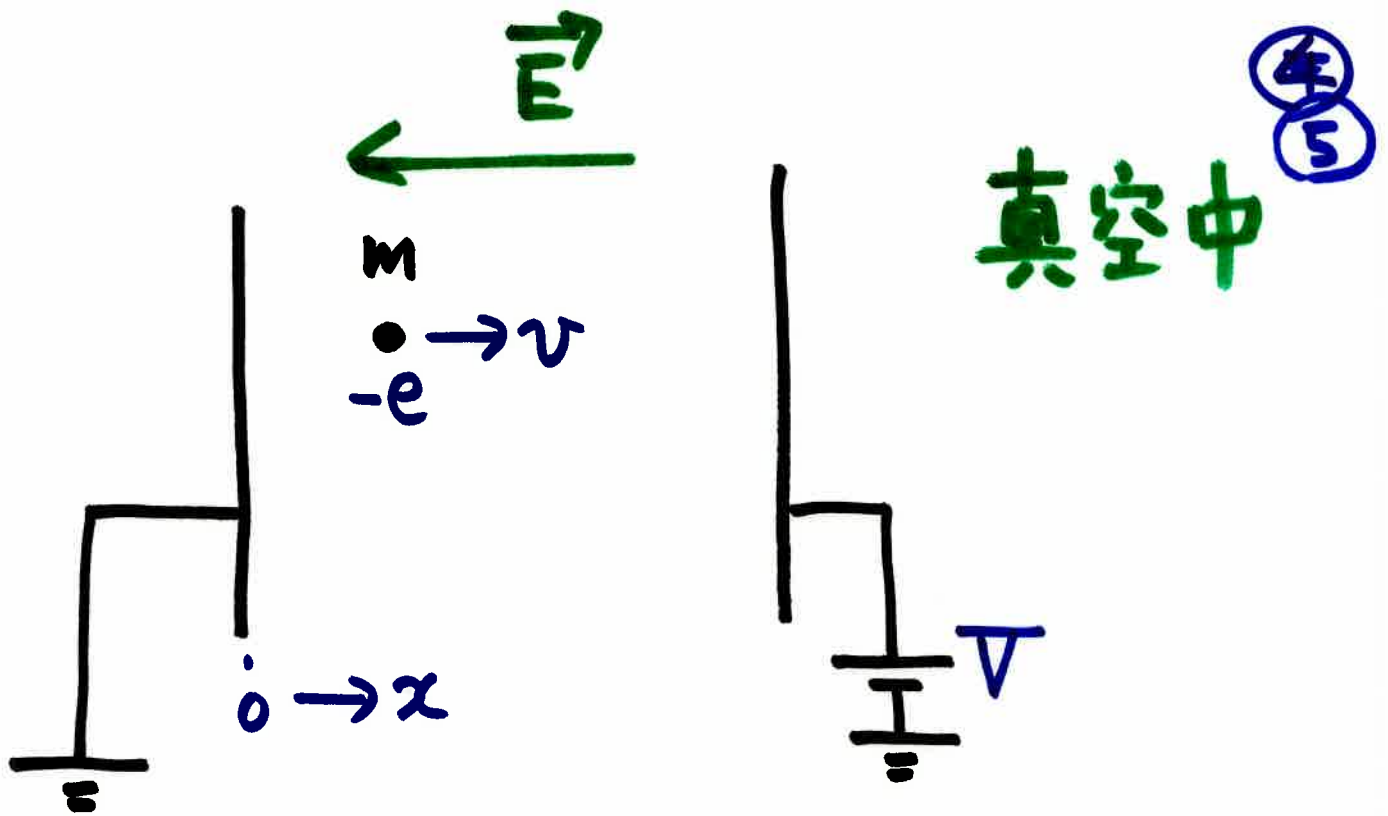
導電率 κ ?

真空中



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f = -eE \quad \dots \textcircled{2} \quad E = \frac{V}{L}$$



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e E \quad v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{eE}{m} t + v_0$$

“真空中”では 加速あるのみ!!

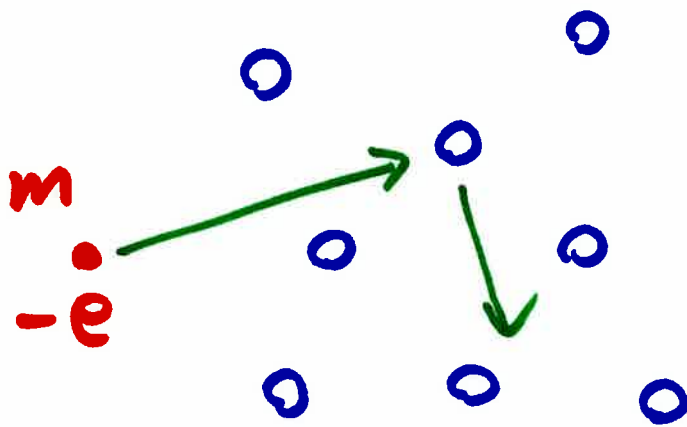
$$v = \mu E$$

$$\mu = \frac{e}{m} t$$

$$t \rightarrow \infty \quad \mu \rightarrow \infty$$

↓
エネルギー損失なし

⑥



τ: 衝突時間
(材料の性質)

結晶中

結晶中では、電子は衝突しながら進む

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = eE - m \frac{v}{\tau} = 0$$

~~~~~  
加速 減速

$$v = \frac{e\tau}{m} E$$

エネルギー  
損失あり

$$\rightarrow \mu = \frac{e\tau}{m}$$

エネルギー損失

$$i = k E = e n_s v$$

$$= e n_s \mu E$$

$$\mu = \frac{e \tau}{m}$$

$$= \frac{e^2 n_s \tau}{m} E$$

$$k = \frac{n_s e^2 \tau}{m}$$

衝突により失なうエネルギー

1回の衝突  $\frac{1}{2} m v^2 \cdot 2$

1秒間に失なうエネルギー  $P$

$$P = \frac{1}{\tau} \cdot n_s \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) \cdot 2$$

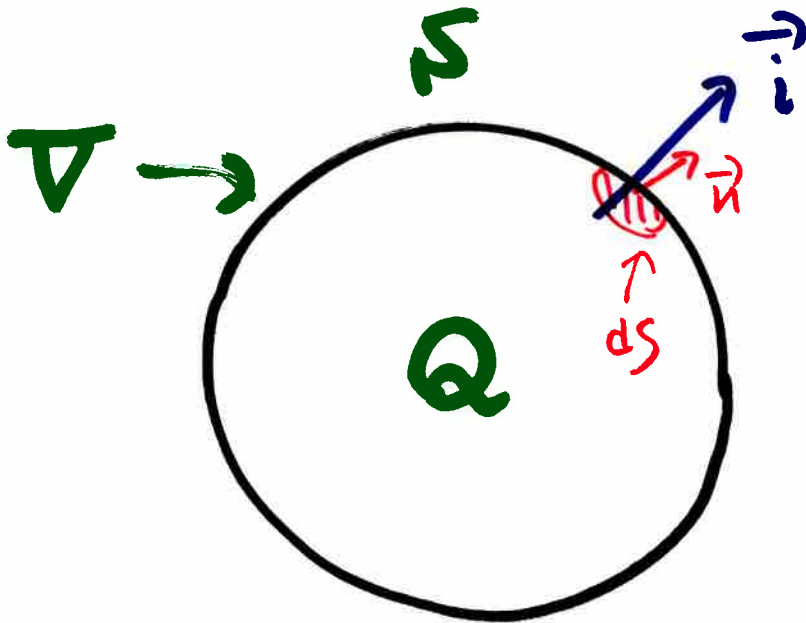
$$= k E^2 = \vec{E} \cdot \vec{i}$$



Joule 熱

⑦

# 連続導体の電流分布



$$I = -\frac{dQ}{dt} \dots \textcircled{1}$$

$$I = \iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS \dots \textcircled{2}$$

$$Q = \iiint_V \rho dV \dots \textcircled{3}$$

⑦'

②, ③ → ①

$$\iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

'' S が固定ならば  $\vec{v} = 0$  ''

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + \left( \vec{x} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\cdot (v_x \vec{x} + v_y \vec{y} + v_z \vec{z})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

⑨

$$\iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$



$$\iiint \nabla \cdot \vec{i} dV = - \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

⑨

$$\nabla \cdot \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

✓

$$\text{div} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

✓

電荷保存の式

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3$$

# 直流電流の分布

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{i} = 0 \dots \textcircled{1} \\ \vec{i} = \kappa \vec{E} \dots \textcircled{2} \end{array} \right. \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1}$$

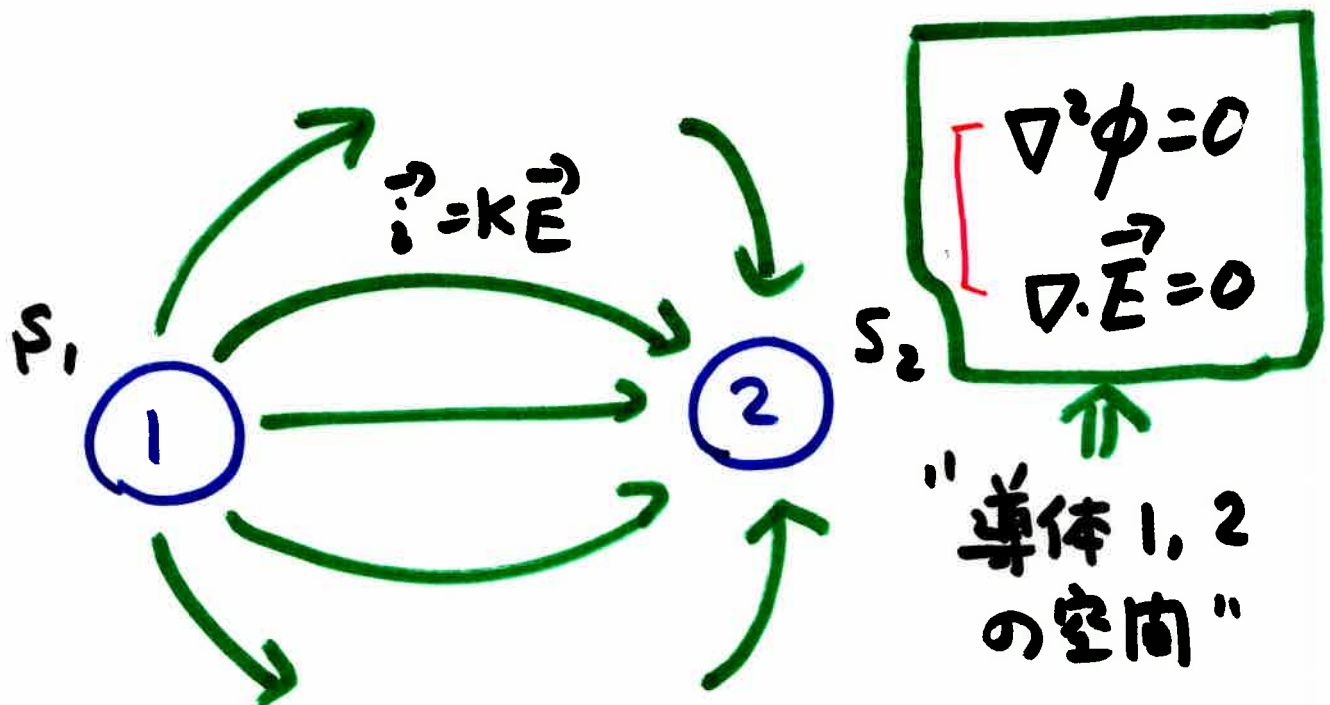
$$\nabla \cdot \vec{i} = \nabla \cdot (\kappa \vec{E}) = \kappa \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla \phi = \underline{\underline{-\nabla^2 \phi = 0}}$$

Laplace 場

# Conductance と 静電容量の関係 ①



$$I = \iint_{S_1} \vec{i} \cdot \vec{n} dS = K \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

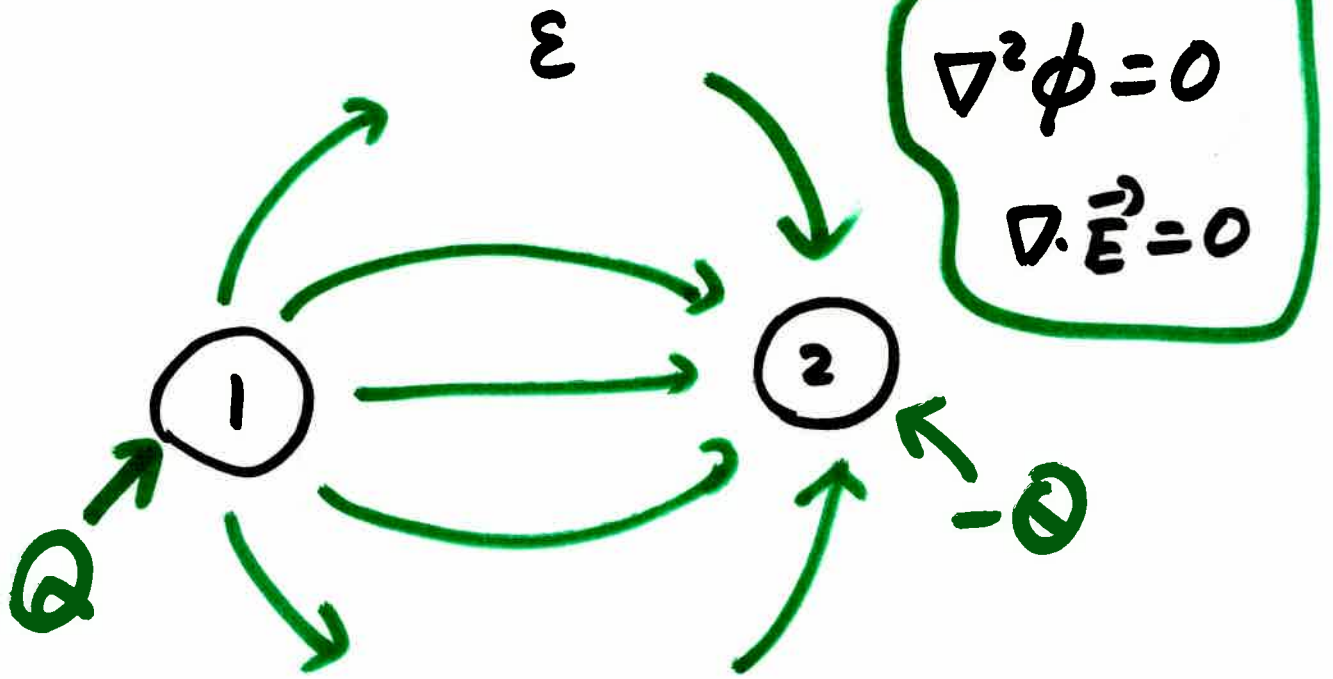
$$V = - \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$G = \frac{I}{V} = \frac{K \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS}{- \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}$$

"電流"は電界  $\vec{E}$  に沿って  
流れる!!

⑫

導体 1, 2 の空間



$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

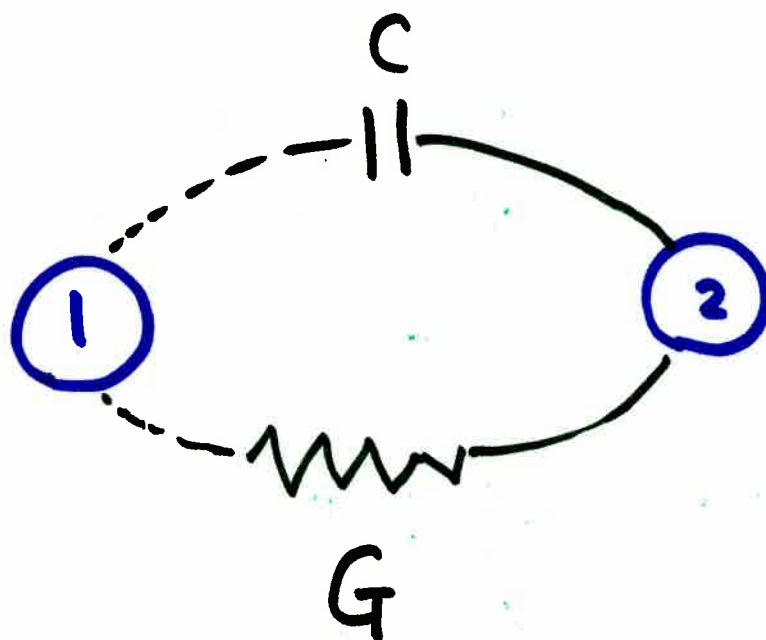
$Q$  に  $\epsilon, \epsilon_0$   $\vec{E}$   
が 1 作 ら れ る

$$Q = \epsilon \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$V = - \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$C = \frac{Q}{V} = - \frac{\epsilon \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS}{\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}$$





$$\frac{G}{C} = \frac{\kappa}{\epsilon} = \frac{1}{RC}$$

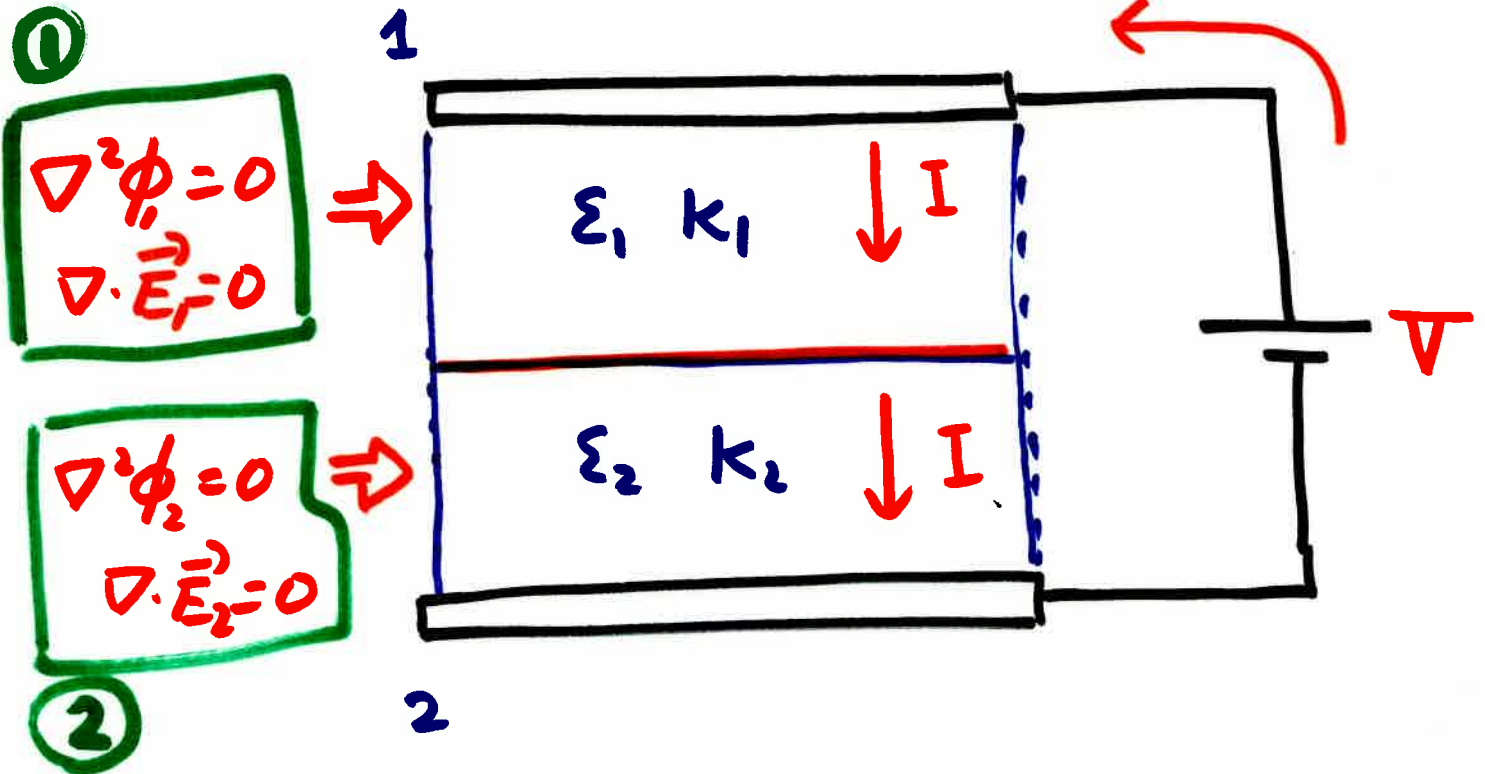
$$RC = \frac{\epsilon}{\kappa} \quad \begin{array}{l} \text{時定数} \\ \text{緩和時間} \end{array}$$

→ 空間の性質

(→ 材料の性質)

# 境界を持つ場合の直流電流

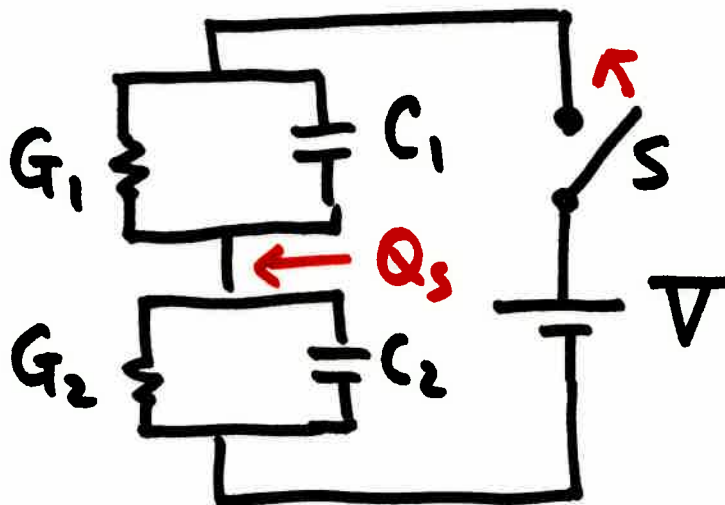
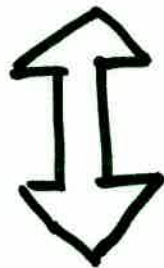
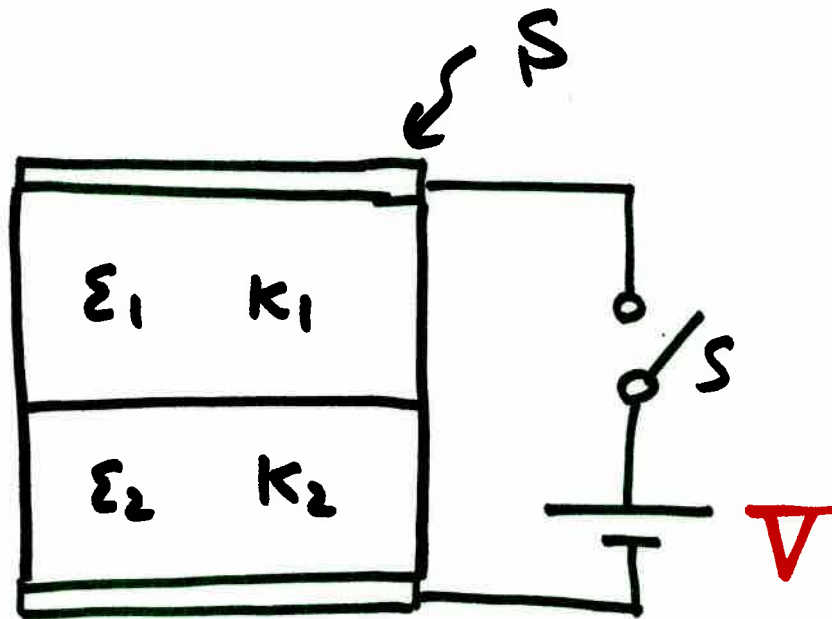
14

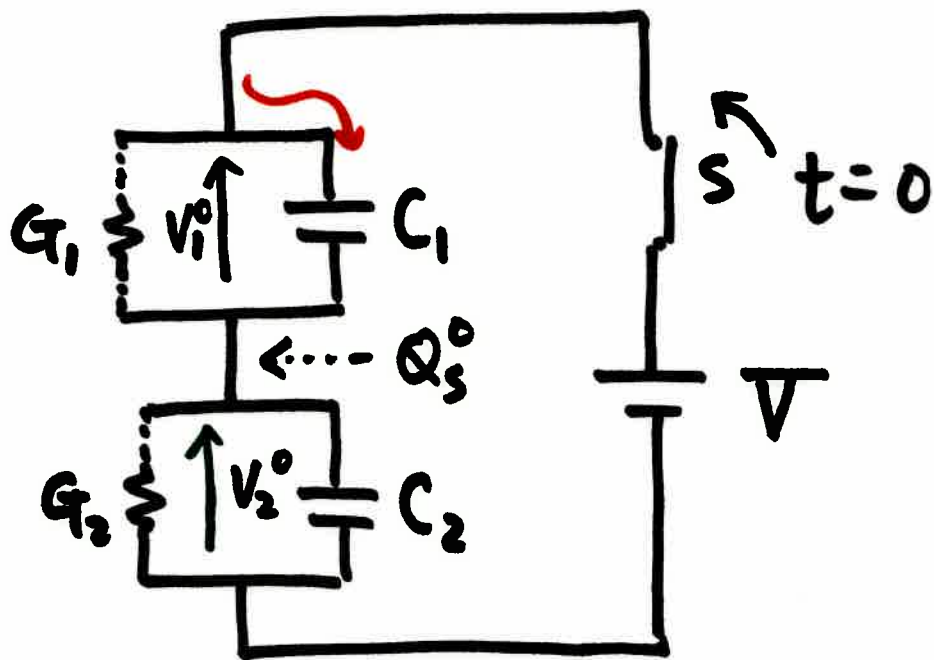


$$\begin{cases} \vec{i} = \kappa \vec{E} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{cases} \quad I = \iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \nabla \cdot \left( \frac{\epsilon}{\kappa} \vec{i} \right)$$

$\vec{i}$  が一定 ならず  $\neq 0$  ( $= q_s$ )  
 $q_s \neq 0$  ( $\frac{\epsilon}{\kappa}$  が界面で異なるとき)

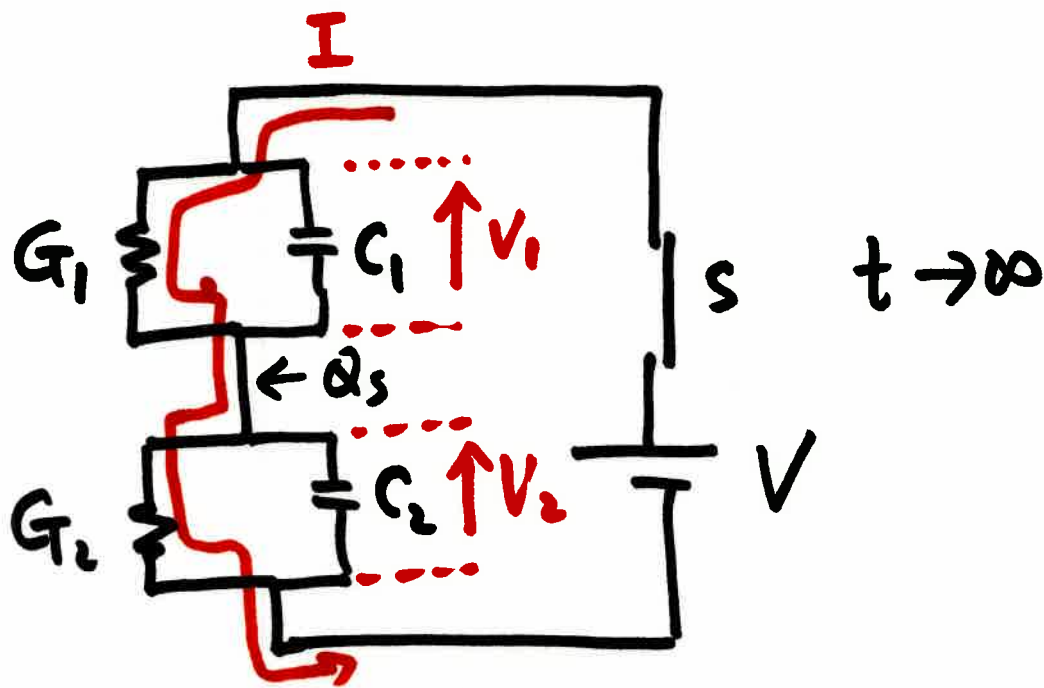




$$Q_s^0 = C_2 V_2^0 - C_1 V_1^0$$

$$V_2^0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V \quad V_1^0 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V$$

$$Q_s^0 = 0$$



$$Q_s = C_2 V_2 - C_1 V_1$$

$$V_2 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} V \quad V_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} V$$

$$Q_s = \frac{C_2 G_1}{G_1 + G_2} V - \frac{C_1 G_2}{G_1 + G_2} V$$

$$= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \left( \frac{C_2}{G_2} - \frac{C_1}{G_1} \right) V$$

$$= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \left( \frac{\epsilon_2}{K_2} - \frac{\epsilon_1}{K_1} \right) V$$

# Maxwell-Wagner 効果

$\frac{\epsilon}{k}$  の異なる材料界面で

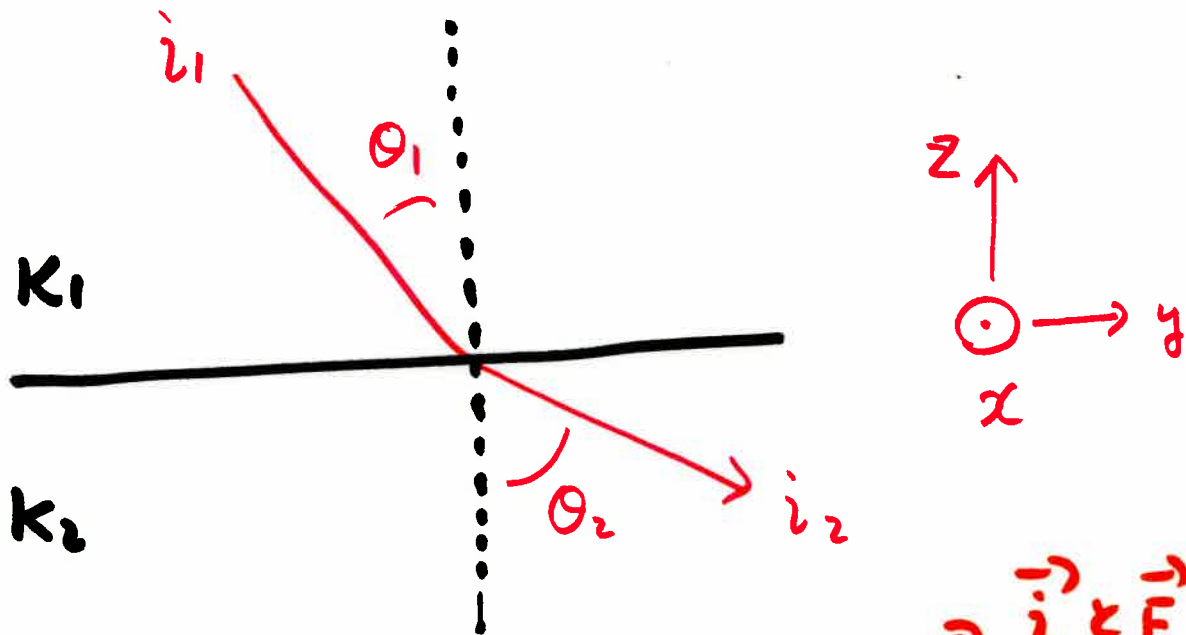
電荷の蓄積がある!!

$$Q_s = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \underbrace{\left( \frac{\epsilon_2}{k_2} - \frac{\epsilon_1}{k_1} \right)}_{\text{wavy line}} V$$

$$\frac{\epsilon_2}{k_2} \neq \frac{\epsilon_1}{k_1} \rightarrow Q_s \neq 0$$

# 境界での条件の検討

15



$$\nabla \cdot \vec{i} = 0 \quad \vec{i} = k \vec{E}$$

$\vec{i}$  と  $\vec{E}$   
は平行

$$\vec{i} = i_x \vec{x} + i_y \vec{y} + i_z \vec{z}$$

$$\begin{cases} \vec{i}_1 = i_1 \sin \theta_1 \vec{y} - i_1 \cos \theta_1 \vec{z} \\ \vec{i}_2 = i_2 \sin \theta_2 \vec{y} - i_2 \cos \theta_2 \vec{z} \end{cases}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{x} + E_y \vec{y} + E_z \vec{z}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_1 \sin \theta_1 \vec{y} - E_1 \cos \theta_1 \vec{z} \\ \vec{E}_2 = E_2 \sin \theta_2 \vec{y} - E_2 \cos \theta_2 \vec{z} \end{cases}$$

# 電界の連続性

y 方向

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

# 電流の連続性

x 方向

$$i_1 \cos \theta_1 = i_2 \cos \theta_2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\frac{E_1}{i_1} \tan \theta_1 = \frac{E_2}{i_2} \tan \theta_2$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \quad // \quad \dots \textcircled{3}$$



# 境界を持つ分布電流と電界の 分布

持

17

補

$$\operatorname{div} \vec{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} \vec{i} = k \vec{E} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \left( \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{i} = \kappa \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

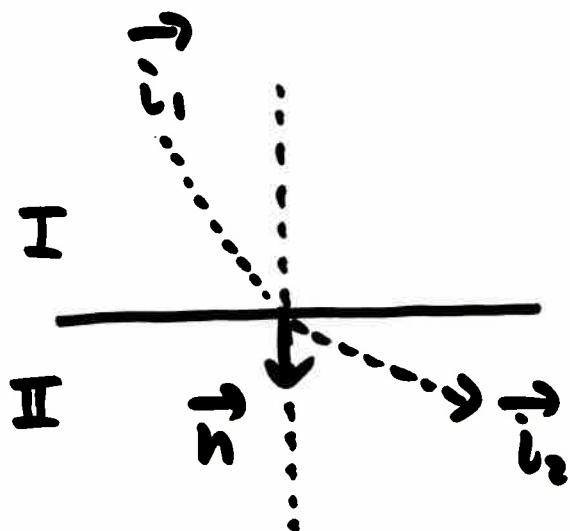
$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon \vec{E})$$

$$= \nabla \cdot \left( \frac{\epsilon}{\kappa} \vec{i} \right)$$

$$= \rho_s \neq 0$$

$$\frac{\epsilon}{\kappa} = \text{const}$$

$$\rho_s = 0$$



$$(\vec{i}_2 + \frac{\partial \vec{D}_2}{\partial t}) - (\vec{i}_1 + \frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t}) \cdot \vec{n} = 0$$

A.C.  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$(k_2 + j\omega\epsilon_2) \vec{E}_2 \cdot \vec{n} = (k_1 + j\omega\epsilon_1) \vec{E}_1 \cdot \vec{n}$$

boundary condition

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0 \\ \sigma = (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} \end{array} \right.$$

①

# 導体と直流電流

$$q : [C]$$

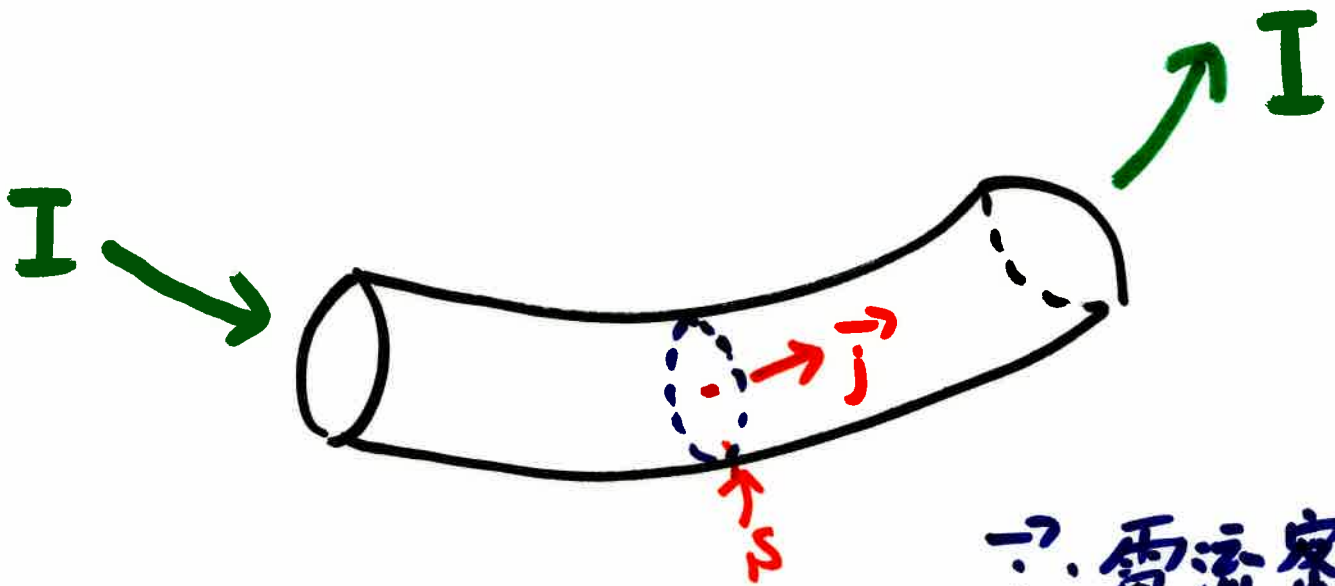
$$q \rightarrow v$$

$$v : [m/s]$$

$$q = 1.6 \times 10^{-19} C$$

$$n_s = [m^{-3}]$$

$$j = q n_s v$$



$\vec{j}$ : 電流密度  
vector

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$$= \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

$$\vec{j} = q n_s \vec{v}$$

(2)

# 材料中のキャリアの移動

$$\vec{f} = q \vec{E}$$

force
↑ charge
electric field

$$\Rightarrow \vec{j} = q n_s \vec{v} = q n_s \mu \vec{E} = \kappa \vec{E}$$

$$\left( \vec{v} = \mu \vec{E} \right)$$

$\mu$ : 移動度 (mobility)  $[m^2/V \cdot s]$

$\kappa = q n_s \mu$  : 導電率  
(conductivity)

$\rho = 1/\kappa$  : 抵抗率  
(resistivity)

$$\left\{ \begin{aligned} [\kappa] &= \frac{[I]}{[E]} = \frac{A \cdot m^{-2}}{V \cdot m^{-1}} = (V^{-1} \cdot m^{-1}) \\ [\rho] &= [\kappa]^{-1} = \Omega \cdot m \end{aligned} \right.$$