3-2.ラプラス変換の応用

3-2-1 定係数微分方程式の解法

(1)解法の流れ

定係数線形微分方程式を考える。

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)=f(t) \qquad (t\geq 0) \qquad (3.10)$$

において、$Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$、$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$とする。

式(3.10)の両辺をラプラス変換すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned}&s^nY(s)-\left(s^{n-1}y(0)+s^{n-2}y'(0)+s^{n-3}y''(0)+\cdots sy^{(n-2)}(0)+y^{(n-1)}(0)\right)\\&+a_{n-1}\left(s^{n-1}Y(s)-\left(s^{n-2}y(0)+s^{n-3}y'(0)+s^{n-4}y''(0)+\cdots sy^{(n-3)}(0)+y^{(n-2)}(0)\right)\right)\\&\cdots+a_1\left(sY(s)-y(0)\right)+a_0Y(s)=F(s)\end{aligned}$$

これを整理すると、

$$\begin{aligned}&s^nY(s)+a_{n-1}s^{n-1}Y(s)+a_{n-2}s^{n-2}Y(s)+\cdots+a_1sY(s)+a_0Y(s)\\&=F(s)+y(0)\left(s^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}+\cdots+a_1\right)+y'(0)\left(s^{n-2}+a_{n-1}s^{n-3}+\cdots+a_2\right)+\cdots+y^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

であるから、$A(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s+a_0$とおくと、

$$Y(s)=\frac{F(s)}{A(s)}+\frac{s^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}+\cdots+a_1}{A(s)}y(0)+\frac{s^{n-2}+a_{n-1}s^{n-3}+\cdots+a_2}{A(s)}y'(0)+\cdots+\frac{1}{A(s)}y^{(n-1)}(0) \qquad (3.11)$$

この$Y(s)$をラプラス逆変換することによって$y(t)$を求めることができる。なお、初期値は既に取り込まれていることに注意されたし。

(2) 部分分数展開と逆変換

$Y(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$が既約分数であるとすると、$Y(s)$は次のように部分分数に展開することができる。

(i) $A(s)=0$の根$s_1,s_2,\cdots,s_n$が全て単根の場合

$$Y(s)=\frac{\alpha_1}{s-s_1}+\frac{\alpha_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-s_n} \qquad (3.12)$$

と部分分数に分解することができる。係数は次のようにして求めることができる。

$$(s-s_i)Y(s)=\left(\frac{\alpha_1}{s-s_1}+\frac{\alpha_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-s_n}\right)(s-s_i)+\alpha_i$$

であるから、この式で$s=s_i$とおけば、

$$\alpha_i = (s - s_i)Y(s)\Big|_{s=s_i} \tag{3.13}$$

このとき、式(3.12)の各項はラプラス変換の性質を用いて次のように逆変換することができる。

$$y(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t} + \cdots + \alpha_n e^{s_n t} \tag{3.14}$$

(ii) $A(s) = 0$ の根のうち、s_1 が l 重根の場合

$$Y(s) = \left\{ \frac{\alpha_{1,1}}{s - s_1} + \frac{\alpha_{1,2}}{(s - s_1)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{1,l}}{(s - s_1)^l} \right\} + \frac{\alpha_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\alpha_{n-l}}{s - s_{n-l}} \tag{3.15}$$

と部分分数に分解できる。

・$\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-l}$ は単根であるから次のようにして求まる。

$$\alpha_i = (s - s_i)Y(s)\Big|_{s=s_i} \tag{3.16}$$

・$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \cdots, \alpha_{1,l}$ は次のようにして求まる。

$$\alpha_{1,i} = \frac{1}{(l-i)!} \frac{d^{l-i}}{ds^{l-i}} Y(s)(s - s_1)^l \Big|_{s=s_1} \tag{3.17}$$

[説明]

式(3.15)より

$$Y(s)(s - s_1)^l = (s - s_1)^{l-1}\alpha_{1,1} + (s - s_1)^{l-2}\alpha_{1,2} + \cdots (s - s_1)^{l-i}\alpha_{1,i} + \cdots + \alpha_{1,l} + (s - s_1)^l \left\{ \frac{\alpha_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\alpha_{n-l}}{s - s_{n-l}} \right\} \tag{3.18}$$

であるので、$\alpha_{1,l}$ は $\alpha_{1,l} = Y(s)(s - s_1)^l \Big|_{s=s_1}$ で求まる。すなわち、式(3.17)が成り立つ。

$l > i$ なる i に対して、式(3.18)を $l - i$ 回微分する。

$$\frac{d^{l-i}}{ds^{l-i}} Y(s)(s - s_1)^l = (l-1)(l-2)\cdots i (s - s_1)^{i-1}\alpha_{1,1} + \cdots + (l-i)!\alpha_{1,i} + \frac{d^{l-i}}{ds^{l-i}}(s - s_1)^l \left(\frac{\alpha_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-l}}{s - s_{m-l}} \right)$$

ここで、$\frac{d^{l-i}}{ds^{l-i}}(s - s_1)^l \left(\frac{\alpha_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-l}}{s - s_{m-l}} \right)$ を計算すると、$(s - s_1)$ なる因子が残るので、$s = s_1$ とおけば、$\frac{d^{l-i}}{ds^{l-i}} Y(s)(s - s_1)^l \Big|_{s=s_1} = (l-i)!\alpha_{1,i}$ となる。すなわち、式(3.17)が成り立つ。

式(3.15)で、$\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at} \right] = \frac{1}{(s-a)^n}$ を用いて、項別にラプラス逆変換することによって、$y(t)$ が求まる。