

2-5. 離散フーリエ変換

2-5-1 離散フーリエ変換の定義

連続的な周期信号 $f(t)$ を、サンプリングした離散的な周期信号 $f_s(t)$ で置き換える。すなわち、サンプリングの周期を T_s 、原信号 $f(t)$ の周期を NT_s (N は整数) とすると、サンプリングした信号 $f_s(t)$ は次の式で表される。

$$f_s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t)(T_s \delta(t - nT_s)) \quad (2.53)$$

右辺に T_s がかけてあるのは、サンプリングした信号 $f_s(t)$ をサンプリング間隔 T_s にわたって時間積分した値が、原信号 $f(t)$ の時間積分値のよい近似になるようにするためである。

$f_s(t)$ を NT_s の周期関数とみなして複素フーリエ級数で展開すると、そのフーリエ係数は次のようになる。

$$c_k = \frac{1}{NT_s} \int_{-\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f(t)(T_s \delta(t - nT_s)) \right) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.54)$$

積分範囲は原信号の任意の 1 周期 NT_s でよいが、デルタ関数が積分の上限、下限にかからないように微小量 ε だけ移動させている。式(2.54)の積分を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} f(t)(T_s \delta(t - nT_s)) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) dt \\ &= \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} T_s f(nT_s) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} nT_s\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

ここで、 k を $k+N$ と置き換えると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} c_{k+N} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} (k+N)n\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \left(\frac{2\pi}{N} kn + 2n\pi\right)\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) = c_k \end{aligned}$$

したがって、式(2.55)のフーリエ係数は N の周期性をもつ (係数のインデックスを N 増減すると同じ係数になる)。

フーリエ級数展開で学んだように、連続周期信号のスペクトルは離散スペクトルであった。上で述べたことは、離散周期信号 $f_s(t)$ のスペクトルは離散周期スペクトルになるということを意味する。フーリエ級数によって元の信号を得るためには、周期スペクトルなので $k=0$ から $k=N-1$ まで加算すればよい(同じスペクトルの繰り返しであるから無限に加算したら結果は発散する)。すなわち、次のようにして元の信号が得られる。

$$\begin{aligned}
f_s(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} nT_s\right) \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} (t - nT_s)\right)
\end{aligned} \tag{2.56}$$

また、 $t = mT_s$ なるサンプリング時刻における $f(t)$ を計算すると、確かに $f(mT_s)$ に一致することが次のようにして確かめられる。

$$\begin{aligned}
f(mT_s) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} (mT_s - nT_s)\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{N} (m - n)\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) N \delta_{nm} \\
&= f(mT_s)
\end{aligned} \tag{2.57}$$

式(2.56)で $t = nT_s$ とおくと、次の式を得る。

$$f(nT_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} n\right) \right) \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right) \tag{2.58}$$

ここで、 $f_n = f(nT_s)$ として、

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} n\right) \text{-----離散フーリエ変換} \tag{2.59}$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right) \text{----離散フーリエ逆変換} \tag{2.60}$$

と離散フーリエ変換・逆変換を定義する。

次の変数 W_N は、複素平面上の単位円を N 分割した点を表わす。

$$W_N = \exp\left(j \frac{2\pi}{N}\right) \tag{2.61}$$

この W_N を用いて、離散フーリエ変換・逆変換を表わすと次のようになる。

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{-kn} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n (W_N^{kn})^* \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \tag{2.62}$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W_N^{nk} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \tag{2.63}$$

2-5-2 離散フーリエ変換の行列表現

離散フーリエ変換・逆変換では、信号の値 f_n とスペクトルの値 F_k が、いずれも N 個の離散的なデータで与えられるので、ディジタル処理に適したフーリエ級数展開といえる。さらに、対称性を用いて演算量を低減することで、高速フーリエ変換(FFT)に発展させることができる。これに関連して、式(2.62)、(2.63)を行列表現で表わすことにする。

離散的な信号 f_n ($n=0,1,2,\dots,N-1$)とその離散フーリエ変換 F_k ($k=0,1,2,\dots,N-1$)を要素とするベクトル $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{F}$ を、次のように定義する。

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

さらに、次の $N \times N$ 行列 $\mathbf{M}_N$ を導入する。

$$\mathbf{M}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

これらを用いると、式(2.62)の離散フーリエ変換、式(2.63)の離散フーリエ逆変換は、それぞれ次のように表される。

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}_N^* \mathbf{f} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N} \mathbf{M}_N \mathbf{F} \quad (2.68)$$

2-5-3 高速フーリエ変換の考え方

サンプリング数 N が 2 のべき乗である場合、離散フーリエ変換・逆変換の計算量を減少させて高速化する方法が考案されている（高速フーリエ変換 (FFT)）。ここでは、その考え方を説明する。

まず、 N を偶数と仮定して $K = \frac{N}{2}$ とする。 N 次元ベクトル $\mathbf{f}$ の第 i 成分を、 i が偶数（0 も含める）の場合と奇数の場合に応じて、 $\mathbf{f}_E$ と $\mathbf{f}_O$ の 2 つのベクトルに分割する。つまり、次のように分割する。

$$\mathbf{f}_E = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_O = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f}_E$ と $\mathbf{f}_O$ の第 i 成分をそれぞれ $f_E(i)$ と $f_O(i)$ と書くことにすると、式(2.62)は次のようになる。

$$\begin{aligned}
F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} (W_N^{kn})^* f_n \\
&= \sum_{i=0}^{K-1} (W_N^{k2i})^* f_{2i} + \sum_{i=0}^{K-1} (W_N^{k(2i+1)})^* f_{2i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{K-1} (W_N^{*2})^{ki} f_E(i) + W_N^{*k} \sum_{i=0}^{K-1} (W_N^{*2})^{ki} f_O(i)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

ベクトル $\mathbf{F}$ を、第 0 成分から第 $K-1$ 成分の上半分と、第 K 成分から第 $N-1$ 成分の下半分に分割して、次のベクトル $\mathbf{F}_U$ と $\mathbf{F}_L$ を定める。

$$\mathbf{F}_U = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{K-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_L = \begin{bmatrix} F_K \\ F_{K+1} \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{F}_U$ および $\mathbf{F}_L$ の第 k 成分 $F_U(k)$ 、 $F_L(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, K-1$) は、それぞれ次のように表される。

$$F_U(k) = \sum_{i=0}^{K-1} (W_N^{*2})^{ki} f_E(i) + W_N^{*k} \sum_{i=0}^{K-1} (W_N^{*2})^{ki} f_O(i) \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
F_L(k) &= \sum_{i=0}^{K-1} (W_N^{*2})^{(K+k)i} f_E(i) + W_N^{*(K+k)} \sum_{i=0}^{K-1} (W_N^{*2})^{(K+k)i} f_O(i) \\
&= \sum_{i=0}^{K-1} (W_N^{*2})^{ki} f_E(i) - W_N^{*k} \sum_{i=0}^{K-1} (W_N^{*2})^{ki} f_O(i)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

ここで、 $K = \frac{N}{2}$ であるから、 $W_N^{*K} = -1$ 、 $W_N^{*2K} = 1$ となることを用いている。

式(2.66)と同様に、次の $K \times K$ 行列 $\mathbf{M}_K$ 、

$$\mathbf{M}_K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(K-1)} \\ 1 & W_N^4 & W_N^8 & \cdots & W_N^{4(K-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & W_N^{2(K-1)} & W_N^{4(K-1)} & \cdots & W_N^{2(K-1)^2} \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

1, W_N^* , W_N^{*2} , $\dots$, $W_N^{*(K-1)}$ を対角成分とする次の $K \times K$ 対角行列 $\mathbf{D}_K$

$$\mathbf{D}_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_N^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & W_N^{*2} & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & W_N^{*(K-1)} \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

を用いれば、式(2.70)、(2.71)から、 $\mathbf{F}_U$ および $\mathbf{F}_L$ は次のように表すことができる。

$$\mathbf{F}_U = \mathbf{M}_K^* \mathbf{f}_E + \mathbf{D}_K \mathbf{M}_K^* \mathbf{f}_O \tag{2.74}$$

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{M}_K^* \mathbf{f}_E - \mathbf{D}_K \mathbf{M}_K^* \mathbf{f}_O \tag{2.75}$$

式(2.74)と(2.75)をまとめると、 $\mathbf{f}$ の離散フーリエ変換 $\mathbf{F}$ は、次の行列表現で表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_U \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_K^* & \mathbf{D}_K \mathbf{M}_K^* \\ \mathbf{M}_K^* & -\mathbf{D}_K \mathbf{M}_K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_E \\ \mathbf{f}_O \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_K & \mathbf{D}_K \\ \mathbf{I}_K & -\mathbf{D}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_K^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_E \\ \mathbf{f}_O \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.76)$$

ただし、 $\mathbf{I}_K$ は $K \times K$ の単位行列を表す。

式(2.67)では、 N 個の離散的な信号 $\mathbf{f}$ の離散フーリエ変換 $\mathbf{F}$ は $N \times N$ の行列 $\mathbf{M}_N$ を用いて $\mathbf{M}_N^* \mathbf{f}$ で表されていた。しかし、信号の個数 N が偶数の場合には、式(2.74)、(2.75)のように、 $N/2 \times N/2$ の行列 $\mathbf{M}_K$ 、 $\mathbf{D}_K$ や、 $N/2$ 次元のベクトル $\mathbf{f}_E$ 、 $\mathbf{f}_O$ を用いて、 $\mathbf{M}_K^* \mathbf{f}_E$ と $\mathbf{D}_K \mathbf{M}_K^* \mathbf{f}_O$ で表すことができる。つまり、離散フーリエ変換を行うために扱う行列のサイズが $1/2 \times 1/2$ となり、**計算量が低減**できる。

さらに $K = \frac{N}{2}$ が偶数であれば、同様の手順によってさらにサイズが $1/2 \times 1/2$ の行列、次元が $1/2$ の

ベクトルを用いて $\mathbf{M}_K^* \mathbf{f}_E$ と $\mathbf{D}_K \mathbf{M}_K^* \mathbf{f}_O$ を表すことができる。つまり、 N が 2 のべき乗であれば、この手順を繰り返すことができ、サイズの小さな行列とベクトルの積の積み重ね（和）で計算することができるようになり、極めて大きな計算量低減効果が得られる。このアルゴリズムが高速フーリエ変換である。