

## 2-4. シャノンの標本化定理

「周波数帯域がある値以下に制限されている波形は、その波形を一定時間間隔で標本化(サンプリング)して得られる標本値だけで再現できる。ここで、周波数帯域が  $W$  [Hz]以下に制限されていれば、 $\frac{1}{2W}$  [sec]ごとに標本化すれば(サンプリング周波数  $2W$  [Hz])、この離散的な信号だけから元のアナログ波形が再現できる。」

[証明]

元の信号を  $f(t)$ 、 $\frac{1}{2W}$  [sec]ごとのサンプリング時刻を  $t_i = \frac{i}{2W}$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) とする。また、 $f(t)$  のフーリエ変換を  $F(\omega)$  とする。

(i) 周波数帯域が  $W$  [Hz]以下に制限されているので、 $|\omega| > 2\pi W$  で  $F(\omega) = 0$  である。すなわち、 $F(\omega)$  を  $-2\pi W \leq \omega \leq 2\pi W$  でのみ定義された周期  $4\pi W$  の関数と考え、フーリエ級数で展開する。

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{4\pi W} \omega\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) \quad (2.47)$$

$$\text{ここで、} c_n = \frac{1}{4\pi W} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) \exp\left(-j \frac{n}{2W} \omega\right) d\omega \quad (2.48)$$

(ii)  $F(\omega)$  のフーリエ逆変換から、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.49) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) \right) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-2\pi W}^{2\pi W} \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2c_n \int_0^{2\pi W} \cos\left(\frac{n}{2W} + t\right) \omega d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[ \frac{\sin\left(\frac{n}{2W} + t\right) \omega}{\frac{n}{2W} + t} \right]_0^{2\pi W} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin 2\pi W \left(\frac{n}{2W} + t\right)}{\frac{n}{2W} + t} = 2W \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin 2\pi W \left(t + \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W \left(t + \frac{n}{2W}\right)} \end{aligned}$$

$n$  を書き直すと次式を得る。

$$f(t) = 2W \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} \frac{\sin 2\pi W \left(t - \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W \left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (2.50)$$

一方、フーリエ逆変換の式(2.49)で  $t_n = \frac{n}{2W}$  とすると、

$$f(t_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{j\omega \frac{n}{2W}} d\omega$$

式(2.48)と見比べれば、 $f(t_n) = 2Wc_{-n}$ であることがわかる。

すなわち、式(2.50)は次のように書き改めることができる。

$$\therefore f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \frac{\sin 2\pi W \left( t - \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W \left( t - \frac{n}{2W} \right)} \quad (2.51)$$

すなわち式(2.51)から、標本点  $t_n = n/2W$  における標本値  $f(t_n)$  がわかれば、元波形  $f(t)$  は、次の標本化

関数(sinc 関数)  $s_n(t)$  と標本値  $f(t_n)$  から再現することができる。

$$s_n(t) = \frac{\sin 2\pi W \left( t - \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W \left( t - \frac{n}{2W} \right)} \quad (2.52)$$

なお、標本化関数  $s_n(t)$  は次の特徴をもつ関数である。

- ・  $s_0(t) = \frac{\sin 2\pi W t}{2\pi W t}$  を  $t_n = n/2W$  だけ平行移動した関数である。
- ・  $t_n = n/2W$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) で  $s_0(t_n) = \frac{\sin n\pi}{n\pi} = 0$
- ・  $s_0(0) = 1$

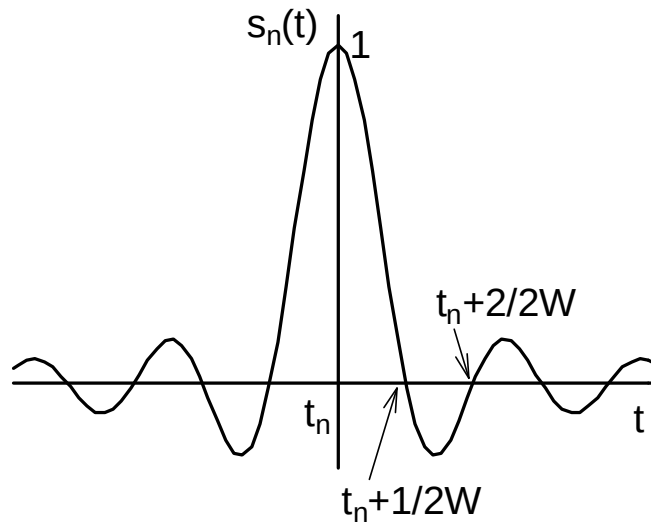


図 2-4 標本化関数  $s_n(t)$