

2-2-4 Parseval の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (2.21)$$

[証明]

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(\omega-y)dy$$

において、 $\omega=0$ とおくと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(-y)dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt$$

ここで、 $f_2(t) = g(t) *$ とすると、

$$F_2(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-j(-\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) * e^{j\omega t} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt \right) * = G(\omega) * \quad (2.22)$$

したがって、次の式が成り立つ

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega) * d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) * dt \quad (2.23)$$

ここで、特に $g(t) = f(t)$ とすれば、次の Parseval の等式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

——Parseval の等式の物理的な意味——

$f(t)$ を 1Ω の抵抗の両端の電圧とすれば、 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ は 1Ω の抵抗が消費する全電力を表す。

これが $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(\omega)|^2}{2\pi} d\omega$ に等しいということは、 $\frac{|F(\omega)|^2}{2\pi}$ が ω におけるスペクトル成分に含まれるエネルギー

一密度を表しているということを意味する。

2-2-5 時間波形と周波数スペクトルの双対性

時間関数 $f(t)$ をフーリエ変換するとスペクトル密度 $F(\omega)$ が得られる。すなわち、 $F[f(t)] = F(\omega)$ 、 $f(t) = F^{-1}[F(\omega)]$ であるから、時間領域と周波数領域の間には双対関係が存在する。

双対関係の例として、次のことがあげられる。

- 時間軸上の 1 点でのみ非零の値をもつ関数は δ 関数であり、その周波数スペクトルは $-\infty$ から ∞ の周波数軸上で一定値 1 をもつ。
- 一つの周波数成分だけをもつ関数は正弦関数もしくは直流であり、その周波数スペクトルは $\delta(\omega)$ である。このような関数は、時間軸上では $-\infty$ から ∞ で一定の振幅をもつ。

2-2-6 その他

フーリエ変換の結果に負の周波数 ω が含まれることにとまどいを感じるかも知れない。 $f(t)$ が実関数の場合には、式(2.2)から次の関係が成り立つ。

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt = F(\omega)^* \quad (2.24)$$

このとき、フーリエ逆変換で $F(\omega)$ から $f(t)$ を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 F(\omega)e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(-\omega)e^{-j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right)^* + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[F(\omega)e^{j\omega t}] d\omega \end{aligned}$$

すなわち、実関数 $f(t)$ を得るためには、正の周波数の正弦波成分 $e^{j\omega t}$ だけでよいことがわかる。