

2-2. フーリエ変換の性質

2-2-1 代表的な関数のフーリエ変換

(1) δ 関数

δ 関数は次の性質をもつ関数として定義される。

$$(i) \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty & (t=0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.7)$$

(iii) 任意の関数 $f(t)$ に対して次の関係が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (2.8)$$

$\delta(-t) = \delta(t)$ であるから δ 関数は偶関数である。

δ 関数のフーリエ変換は次のように求まる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^0 = 1 \quad (2.9)$$

すなわち、 δ 関数のスペクトルは $-\infty$ から ∞ に広がり、かつ振幅は ω によらず一定である。

幅 $2a$ 、振幅 E の単一矩形パルスで $2aE = 1$ を保ったまま $a \rightarrow 0$ とした極限が δ 関数と一致する。単一矩形パルス(幅 $2a$ 、振幅 E)のフーリエ変換は

$$F(\omega) = 2aE \frac{\sin a\omega}{a\omega} \quad (2.10)$$

で与えられるので、 $2aE = 1$ で $a \rightarrow 0$ とすると $\frac{\sin a\omega}{a\omega} \rightarrow 1$ であるから $F(\omega) = 1$ となり、確かに上記の結果と一致する。

一方、 $F(\omega) = 1$ のフーリエ逆変換は δ 関数に一致するはずであるので、

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (2.11)$$

と表現される。

(2) 直流 $f(t) = E$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \delta(\omega) \quad (2.12)$$

2-2-2 フーリエ変換の性質

関数 $f(t)$ をフーリエ変換により $F(\omega)$ を求めることを、 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ と書くことにする。フーリエ変換では次の関係(性質)が成り立つ。

(1) 線形性

$$\mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{F}[f_1(t)] + \beta \mathcal{F}[f_2(t)] \quad (2.13)$$

(2) 原関数の移動

$$\mathcal{F}[f(t - \tau)] = \exp(-j\omega\tau) \mathcal{F}[f(t)] \quad (2.14)$$

(3)像関数の移動

$$\mathcal{F}[\exp(-jkt)f(t)] = F(\omega + k) \quad (2.15)$$

(4)時間軸の拡大

$$\mathcal{F}[f(At)] = \frac{1}{A} F\left(\frac{\omega}{A}\right) \quad (2.16)$$

(5)時間微分

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n \mathcal{F}[f(t)] \quad (2.17)$$

(6)対称性

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \quad (2.18)$$

2・2・3 畳み込み関数とそのフーリエ変換

次の積分演算を Convolution(畳み込み)という。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (2.19)$$

$f(t)$ を二つの関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ の畳み込み関数と呼び、 $f = f_1 * f_2$ で表す。

畳み込み関数のフーリエ変換は、次のように二つの関数のフーリエ変換の積に等しい。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t') e^{-j\omega(t'+\tau)} dt' \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t') e^{-j\omega t'} dt' \end{aligned}$$

すなわち、

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (2.20)$$