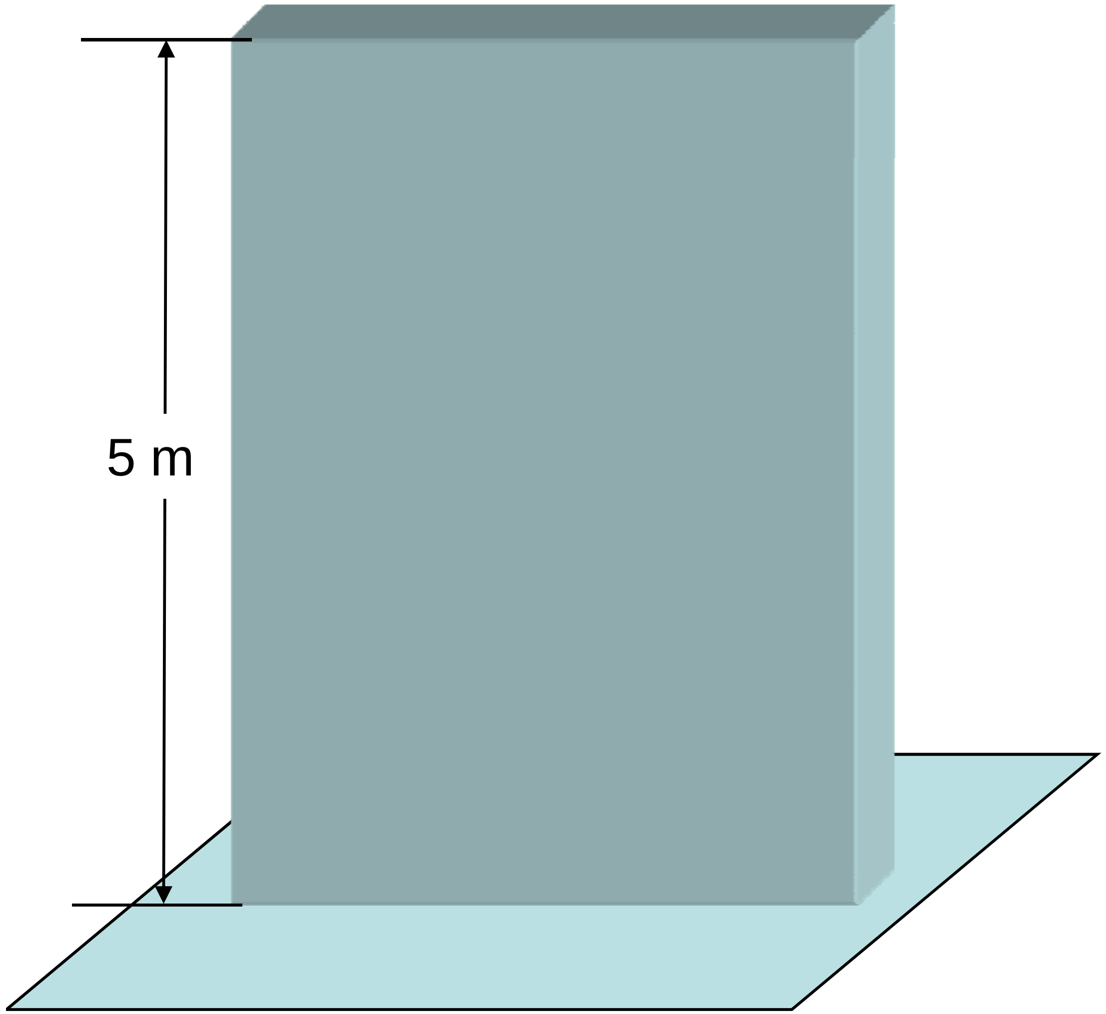
	弾性	粘性	粘弾性
微視的			
巨視的		●	

巨視的な粘度ー具体的な粘度の値

気体	10	μPa･s
液体(水）	1	mPa･s
溶融ポリマー	1	kPa･s
ガラス（800℃)	10	kPa･s
液体と固体の境界	1	TPa･s
ガラス（常温），コンクリート	10～100	PPa･s

指数	接頭語	読み	指数	接頭語	読み
10^{18}	E	エクサ	10^{-3}	m	ミリ
10^{15}	P	ペタ	10^{-6}	μ	マイクロ
10^{12}	T	テラ	10^{-9}	n	ナノ
10^{9}	G	ギガ	10^{-12}	p	ピコ
10^{6}	M	メガ	10^{-15}	f	フェムト
10^{3}	K	キロ	10^{-18}	A	アト

Quiz



高さ5mのガラス板が垂直に立っているとする

ガラスの粘度　:　10^{16} Pa s
ガラスの密度　:　2.5 g/cm^3

問1　ガラス板の底の部分が自重で1%縮むのにどのくらいの時間がかかるか？

問2　ガラス板の高さの時間変化を表す式を示せ

Quizの答え

圧縮応力　$500 \times 2.5 \times g = 12.25 \ \mathrm{N/cm^2} = 12.25 \times 10^4 \ \mathrm{Pa}$

ひずみ速度　$\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{dt}} = \dfrac{\sigma}{\eta} = \dfrac{12.25 \times 10^4}{10^{16}} \approx 10^{-11} \ \mathrm{s}^{-1}$

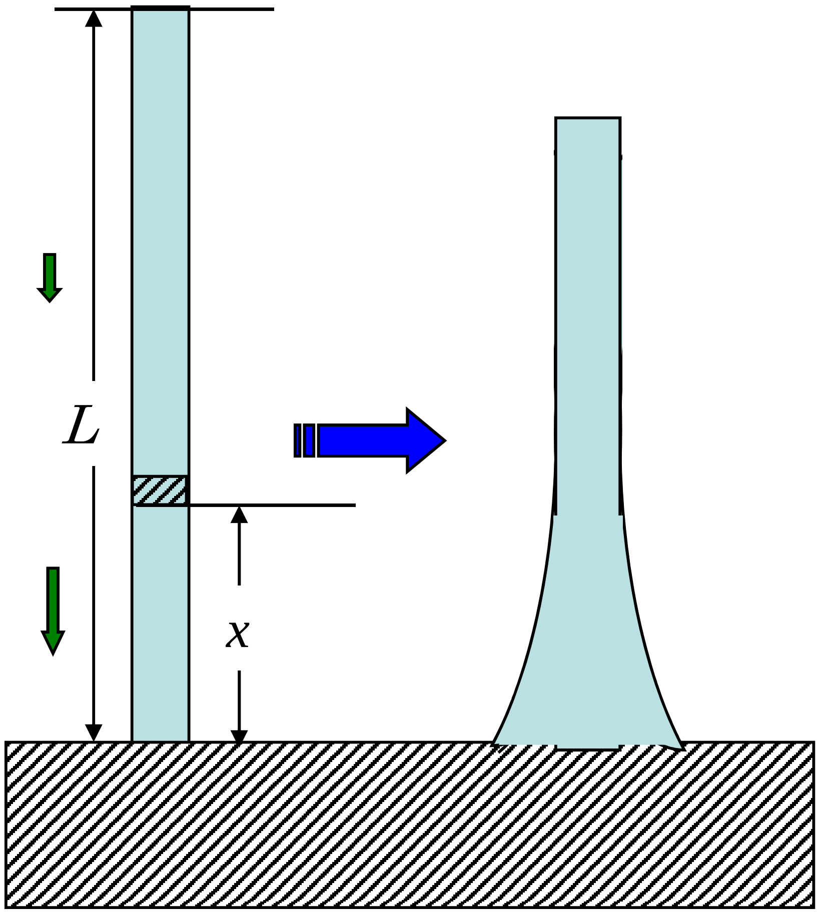
1年間は約3千万秒　$3 \times 10^7 \ \mathrm{s/year}$

ひずみ速度　$3 \times 10^{-4} \ \mathrm{year}^{-1}$

3000年でひずみが1

30年でひずみが1%

粘性体の自重による変形



微小領域に加わる荷重

$$\rho g A_0 (L_0 - x)$$

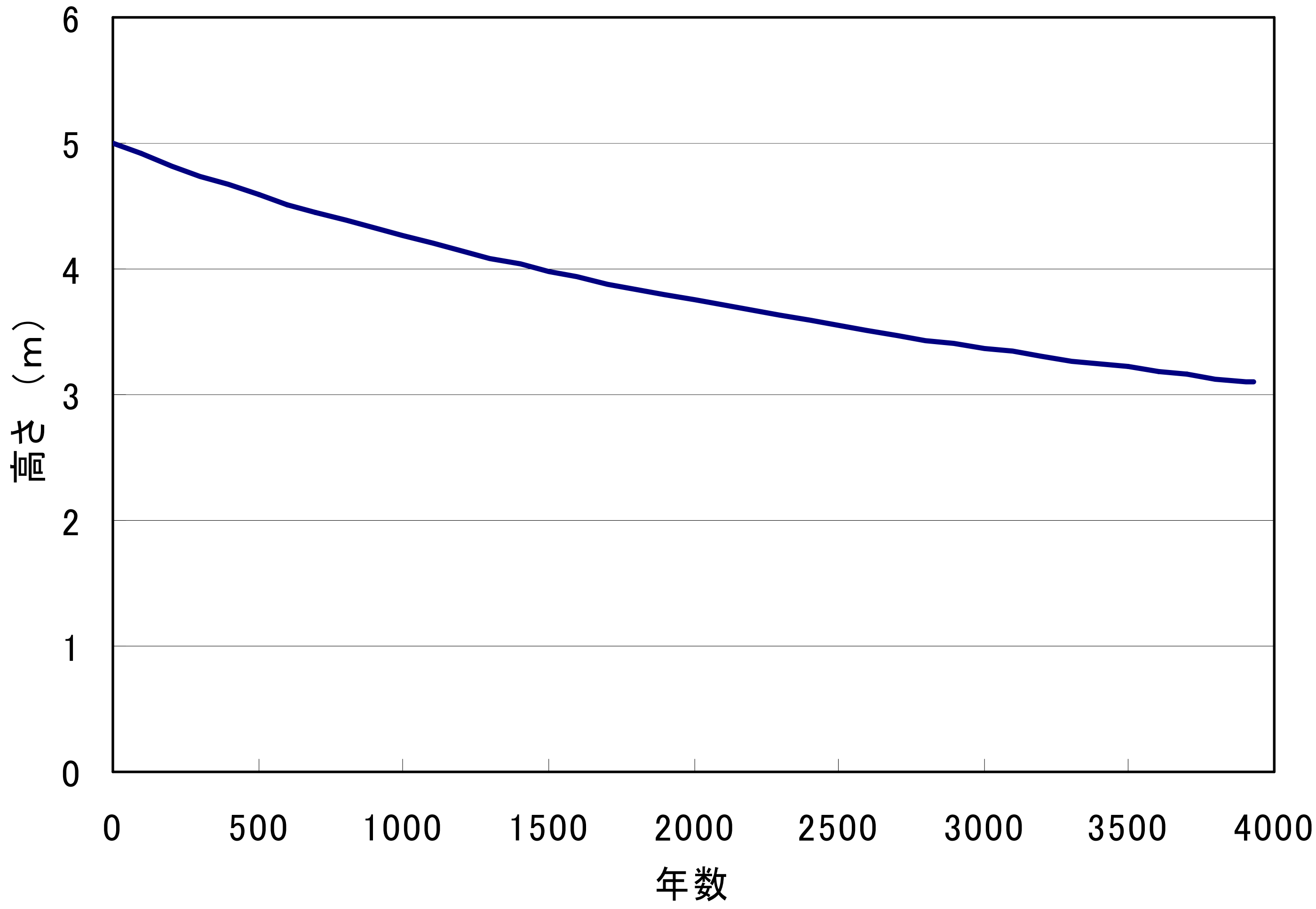
微小領域のひずみ速度

$$\eta \frac{1}{\ell}\frac{d\ell}{dt} = \frac{\rho g A_0 (L_0 - x)}{A}$$

時刻 t における局所ひずみ

$$\frac{\ell}{\ell_0} = \frac{\eta}{\eta + \rho g (L_0 - x) t}$$

$$\text{全長} = \int_0^{L_0} \frac{\ell}{\ell_0} dx = \frac{\eta}{\rho g t} \ln(1 + \frac{\rho g t}{\eta} L_0)$$



6
5
4
3
2
1
0
高さ（m）
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
年数

巨視的な粘性

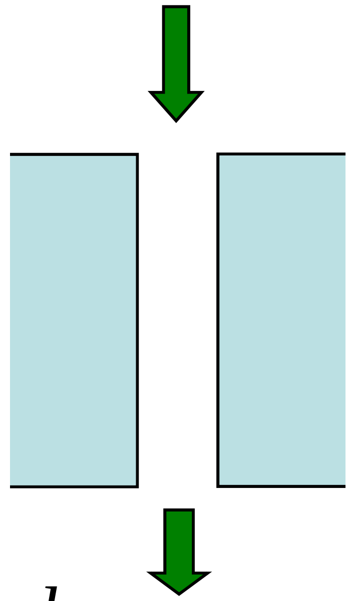
- 円管内の流れ
  速度分布

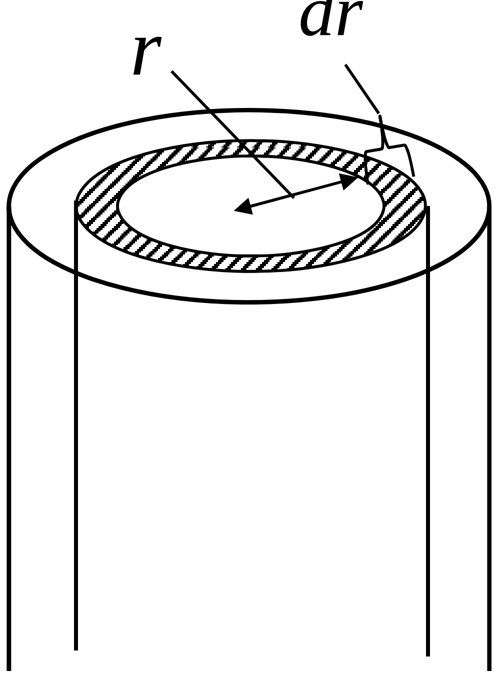
$$u = \frac{\Delta P}{4L\eta}\left(R^2 - r^2\right)$$

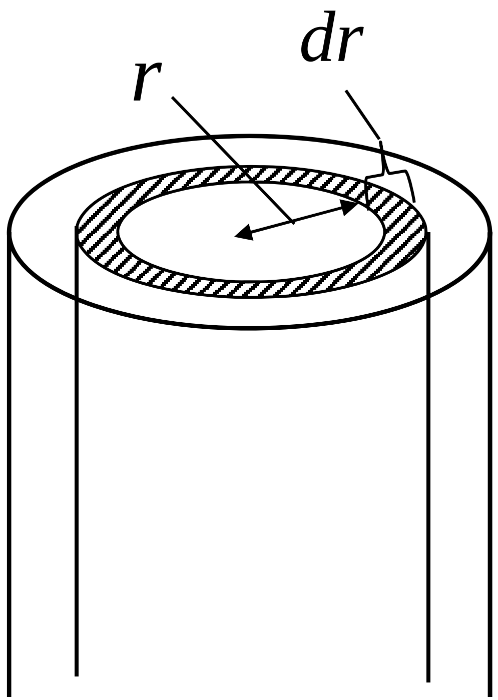
体積流量

ハーゲン　ポアゼーユの式
Hagen Poiseuilleの式

$$Q = \frac{\pi\,\Delta P}{8L\eta}R^4$$







中心からr で　速度　u

中心からr+dr で　速度　u+(du/dr)dr

半径 r の円筒側面に作用する力

$$-2\pi rL\eta\frac{du}{dr}$$

半径 r + dr の円筒側面では

$$2\pi(r+dr)L\eta\left(\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}dr\right)$$

両者を合わせると

$$2\pi L\eta\left((r+dr)\left(\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}dr\right)-r\frac{du}{dr}\right)$$

$$=2\pi L\eta\left(r\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}\right)dr$$

$$=2\pi L\eta d\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

円筒の端面から受ける力

$$\Delta P 2\pi r dr$$

定常流だから

$$2\pi L\eta\, d\left(r\frac{du}{dr}\right)+\Delta P 2\pi r dr=0$$

$$d\left(r\frac{du}{dr}\right)=-\frac{\Delta P}{L\eta}rdr$$

積分すると

$$r\frac{du}{dr}=-\frac{\Delta P}{2L\eta}r^2+C$$

$r=0$ で $\frac{du}{dr}=0$ だから $C=0$

$$\frac{du}{dr}=-\frac{\Delta P}{2L\eta}r$$

もう一度積分すると

$$u=-\frac{\Delta P}{2L\eta}\frac{r^2}{2}+C$$

管壁（r=R）でu=0だから

$$C=-\frac{\Delta P}{4L\eta}R^2$$

$$u=\frac{\Delta P}{4L\eta}\left(R^2-r^2\right)$$

これから学ぶ粘性論

- 流体力学
  Navier-stokesの方程式

  運動方程式
  ＋ニュートン流体のレオロジー方程式

  Navier-stokes の方程式から
  Hagen-Poiseuilleの式を導く

流体力学

運動方程式

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho K_i + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}$$

ニュートン流体の
レオロジー方程式

$$T_{ij} = -(p + \frac{2}{3}\mu I_e)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

Navier-Stokesの方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

$$= \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nu\Delta\mathbf{v}$$

N-S方程式
円柱座標
z方向成分

$$(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z})$$

$$= K_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho}(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2})$$

流体力学

N-S方程式
円柱座標
z方向成分

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$=K_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}\right)$$

定常状態，円筒対称

$$\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \vartheta}=0,\quad v_\theta,\quad v_r=0,\quad K_Z=0$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\Delta P}{L} \quad \Rightarrow \quad d\left(r\frac{dv}{dr}\right)=-\frac{\Delta P}{\eta L}rdr$$