通信伝送工学第 13 回　雑音による誤り（演習）(p. 247-259)

【課題の解答例】
4.3 別掲

【演習】
<u>雑音による誤り率</u>
2 値 PAM (polar NRZ)

$$x(t)=\begin{cases} A+w(t), & \text{symbol 1,} \\ -A+w(t), & \text{symbol 0,} \end{cases} \quad 0\le t\le T_b \quad (4.21)$$

を integrate-and-dump 回路

$$y(t)=\int_0^{T_\mathrm{b}} kx(t)\,\mathrm{d}t \qquad (4.23)$$

で受信し，最適なタイミングでサンプリングする場合を考える．なお，$w(t)$は電力スペクトル密度 $N_0/2$ の白色ガウス雑音である．

(1) シンボル 1 および 0 がそれぞれ送信された場合のサンプリング出力 $y(t)$ を求めよ．

$$y(T_b)=\begin{cases} AT_b+\int_0^{T_b} w(t)\,\mathrm{d}t, & \text{symbol 1} \\ -AT_b+\int_0^{T_b} w(t)\,\mathrm{d}t, & \text{symbol 0} \end{cases}$$

(2) シンボル 1 および 0 がそれぞれ送信された場合のサンプリング出力の確率密度関数 $f(y\,|\,1)$ および $f(y\,|\,0)$ を求めよ．

シンボル 1 の場合は平均 AT_b，シンボル 0 の場合は平均$-AT_\mathrm{b}$で，いずれも分散

$$\sigma_Y^2=E\left[\left(\int_0^{T_\mathrm{b}} w(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\right]=E\left[\int_0^{T_\mathrm{b}}\int_0^{T_\mathrm{b}} w(t)w(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\right]=\int_0^{T_\mathrm{b}}\int_0^{T_\mathrm{b}} E\left[w(t)w(u)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{T_\mathrm{b}}\int_0^{T_\mathrm{b}} R_W(t-u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t=\int_0^{T_\mathrm{b}}\int_0^{T_\mathrm{b}} \frac{N_0}{2}\delta(t-u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t=\frac{N_0T_\mathrm{b}}{2}$$

のガウス分布に従う．すなわち，

$$f(y\,|\,1)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0T_\mathrm{b}}}\exp\left(-\frac{(y-AT_b)^2}{N_0T_\mathrm{b}}\right),\quad f(y\,|\,0)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0T_\mathrm{b}}}\exp\left(-\frac{(y+AT_b)^2}{N_0T_\mathrm{b}}\right)$$

(3) シンボル 1 を送信しシンボル 0 と誤る確率 p_{01} およびシンボル 0 を送信しシンボル 1 と誤る確率 p_{10} を誤差補関数を用いて求めよ．

$$p_{01}=\int_{-\infty}^{\gamma} f(y\,|\,1)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0T_\mathrm{b}}}\int_{-\infty}^{\gamma}\exp\left(-\frac{(y-AT_b)^2}{N_0T_\mathrm{b}}\right)\mathrm{d}y$$

$$p_{10}=\int_{\gamma}^{\infty} f(y\,|\,0)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0T_\mathrm{b}}}\int_{-\infty}^{\gamma}\exp\left(-\frac{(y+AT_b)^2}{N_0T_\mathrm{b}}\right)\mathrm{d}y$$

誤差補関数

$$\mathrm{erfc}(u)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^{\infty}\exp\left(-z^2\right)\mathrm{d}z$$

に代入するために，

$$z=\frac{y\pm AT_b}{\sqrt{N_0T_\mathrm{b}}},\quad \mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{N_0T_\mathrm{b}}},\quad y=\gamma\to z=\frac{\lambda\pm AT_b}{\sqrt{N_0T_\mathrm{b}}}$$

を用いると，

$$p_{01}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\gamma-AT_b}{\sqrt{N_0T_b}}}\exp\left(-z^2\right)\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{AT_b-\gamma}{\sqrt{N_0T_\mathrm{b}}}\right)$$

$$p_{10}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\gamma+AT_b}{\sqrt{N_0T_b}}}^{\infty}\exp\left(-z^2\right)\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{AT_b+\gamma}{\sqrt{N_0T_\mathrm{b}}}\right)$$

ただし,

$$\mathrm{erfc}\left(-u\right)=2-\mathrm{erfc}\left(u\right)$$

を使用した.

(3) ビット当たりエネルギー対雑音電力スペクトル密度比 E_b/N_0 を求めよ.

$$E_\mathrm{b}=\int_{-\infty}^{\infty}g^2\left(t\right)\mathrm{d}\,t=\int_0^{T_\mathrm{b}}A^2\,\mathrm{d}\,t=A^2T_\mathrm{b},\quad \frac{E_\mathrm{b}}{N_0}=\frac{A^2T_\mathrm{b}}{N_0}$$

(4) シンボル発生確率が $p_0=p_1=0.5$, $E_\mathrm{b}/N_0=4$(=6.02dB) の場合について,判定しきい値γを$-0.8AT_\mathrm{b}$から $0.8AT_\mathrm{b}$ まで $0.2AT_\mathrm{b}$ 刻みで変化させた場合の,ビット誤り率 p_e を求めよ.ただし,誤差補関数の値は添付の表を参照せよ.(問題が間違っていたので修正)

$\gamma=\alpha AT_\mathrm{b}$ と置くと,

$$p_\mathrm{e}=\frac{1}{2}\left(p_{10}+p_{01}\right)=\frac{1}{4}\left[\mathrm{erfc}\left(\frac{\left(1+\alpha\right)AT_b}{\sqrt{N_0T_\mathrm{b}}}\right)+\mathrm{erfc}\left(\frac{\left(1-\alpha\right)AT_b}{\sqrt{N_0T_\mathrm{b}}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\mathrm{erfc}\left(\left(1+\alpha\right)\sqrt{\frac{E_\mathrm{b}}{N_0}}\right)+\mathrm{erfc}\left(\left(1-\alpha\right)\sqrt{\frac{E_\mathrm{b}}{N_0}}\right)\right]$$

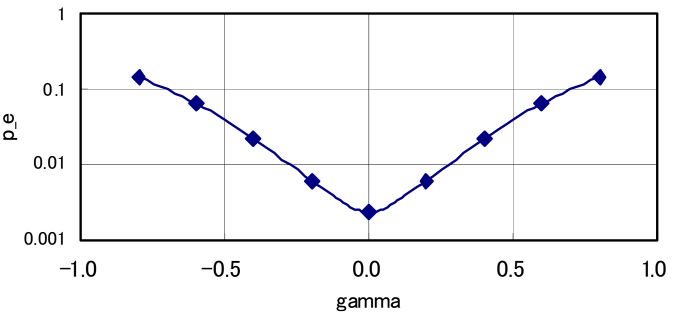
例えば,$\alpha=-0.8$ の場合,

$$p_\mathrm{e}\left(\alpha=-0.8\right)=\frac{1}{4}\left[\mathrm{erfc}\left(\left(1+0.8\right)\times 2\right)+\mathrm{erfc}\left(\left(1-0.8\right)\times 2\right)\right]=\frac{1}{4}\left[\mathrm{erfc}\left(3.6\right)+\mathrm{erfc}\left(0.4\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(0.000000+0.571608\right)=0.142902$$

同様に計算すると,

α	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8
p_e	0.142902	0.064476	0.022440	0.006085	0.002339	0.006085	0.022440	0.064476	0.142902



【質問への回答】

Q: 誤り率導出の過程で,教科書と板書で係数が異なっている.

A: 教科書では,$kAT_\mathrm{b}=1$ という正規化を行っているのに対して,講義では $k=1$ という正規化を行った.最後に E_b/N_0 を計算すると約分されて同じ表現が現れる.

Q: p_{01} が erfc を使って求められない.

A: 演習問題の解答にあるように,p_{01} を求めるためには,

$$\mathrm{erfc}\left(-u\right)=2-\mathrm{erfc}\left(u\right)$$

を使う必要がある．この公式は erfc の定義から簡単に導出できる．

$$\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(u\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{u}^{\infty}\exp\left(-z^{2}\right)\mathrm{d}\,z$$

は z が平均 0，分散 1/2 のガウス分布の相補累積分布（complementary CDF）を表す．よって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(-u\right)&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-u}^{\infty}\exp\left(-z^{2}\right)\mathrm{d}\,z\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-z^{2}\right)\mathrm{d}\,z-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-u}\exp\left(-z^{2}\right)\mathrm{d}\,z\\&=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{u}^{\infty}\exp\left(-\zeta^{2}\right)\mathrm{d}\,\zeta\quad\left(\zeta=-z\right)\\&=1-\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(-u\right)\end{aligned}$$

【期末試験】
範囲は確率過程以降とする．
日時：2 月 9 日（火）10:40-12:10
場所：S222 講義室

誤差補関数表

z	erfc(z)
0.00	1.000000
0.05	0.943628
0.10	0.887537
0.15	0.832004
0.20	0.777297
0.25	0.723674
0.30	0.671373
0.35	0.620618
0.40	0.571608
0.45	0.524518
0.50	0.479500
0.55	0.436677
0.60	0.396144
0.65	0.357971
0.70	0.322199
0.75	0.288845
0.80	0.257899
0.85	0.229332
0.90	0.203092
0.95	0.179109
1.00	0.157299
1.05	0.137564
1.10	0.119795
1.15	0.103876
1.20	0.089686
1.25	0.077100
1.30	0.065992
1.35	0.056238
1.40	0.047715
1.45	0.040305

z	erfc(z)
1.50	0.033895
1.55	0.028377
1.60	0.023652
1.65	0.019624
1.70	0.016210
1.75	0.013328
1.80	0.010909
1.85	0.008889
1.90	0.007210
1.95	0.005821
2.00	0.004678
2.05	0.003742
2.10	0.002979
2.15	0.002361
2.20	0.001863
2.25	0.001463
2.30	0.001143
2.35	0.000889
2.40	0.000689
2.45	0.000531
2.50	0.000407
2.55	0.000311
2.60	0.000236
2.65	0.000178
2.70	0.000134
2.75	0.000101
2.80	0.000075
2.85	0.000056
2.90	0.000041
2.95	0.000030

z	erfc(z)
3.00	0.000022
3.05	0.000016
3.10	0.000012
3.15	0.000008
3.20	0.000006
3.25	0.000004
3.30	0.000003
3.35	0.000002
3.40	0.000002
3.45	0.000001
3.50	0.000001
3.55	0.000001
3.60	0.000000
3.65	0.000000
3.70	0.000000
3.75	0.000000
3.80	0.000000
3.85	0.000000
3.90	0.000000
3.95	0.000000
4.00	0.000000
4.05	0.000000
4.10	0.000000
4.15	0.000000
4.20	0.000000
4.25	0.000000
4.30	0.000000
4.35	0.000000
4.40	0.000000
4.45	0.000000

z	erfc(z)
4.50	0.000000
4.55	0.000000
4.60	0.000000
4.65	0.000000
4.70	0.000000
4.75	0.000000
4.80	0.000000
4.85	0.000000
4.90	0.000000
4.95	0.000000
5.00	0.000000
5.05	0.000000
5.10	0.000000
5.15	0.000000
5.20	0.000000
5.25	0.000000
5.30	0.000000
5.35	0.000000
5.40	0.000000
5.45	0.000000
5.50	0.000000
5.55	0.000000
5.60	0.000000
5.65	0.000000
5.70	0.000000
5.75	0.000000
5.80	0.000000
5.85	0.000000
5.90	0.000000
5.95	0.000000

Problem 4.3

Ideal low-pass filter with variable bandwidth. The transfer function of the matched filter for a rectangular pulse of duration τ and amplitude A is given by

$$H_{opt}(f) = \text{sinc}(fT)\exp(-j\pi fT) \tag{1}$$

The amplitude response $|H_{opt}(f)|$ of the matched filter is plotted in Fig. 1(a). We wish to approximate this amplitude response with an ideal low-pass filter of bandwidth B. The amplitude response of this approximating filter is shown in Fig. 1(b). The requirement is to determine the particular value of bandwidth B that will provide the best approximation to the matched filter.

We recall that the maximum value of the output signal, produced by an ideal low-pass filter in response to the rectangular pulse occurs at $t = T/2$ for $BT \le 1$. This maximum value, expressed in terms of the sine integral, is equal to $(2A/\pi)\text{Si}(\pi BT)$. The average noise power at the output of the ideal low-pass filter is equal to BN_0. The maximum output signal-to-noise ratio of the ideal low-pass filter is therefore

$$(\text{SNR})_0' = \frac{(2A/\pi)^2 \text{Si}^2(\pi BT)}{BN_0} \tag{2}$$

Thus, using Eqs. (1) and (2), and assuming that $AT = 1$, we get

$$\frac{(\text{SNR})_0'}{(\text{SNR})_0} = \frac{2}{\pi^2 BT}\text{Si}^2(\pi BT)$$

This ratio is plotted in Fig. 2 as a function of the time-bandwidth product BT. The peak value on this curve occurs for $BT = 0.685$, for which we find that the maximum signal-to-noise ratio of the ideal low-pass filter is 0.84 dB below that of the true matched filter. Therefore, the " best" value for the bandwidth of the ideal low-pass filter characteristic of Fig. 1(b) is $B = 0.685/T$.

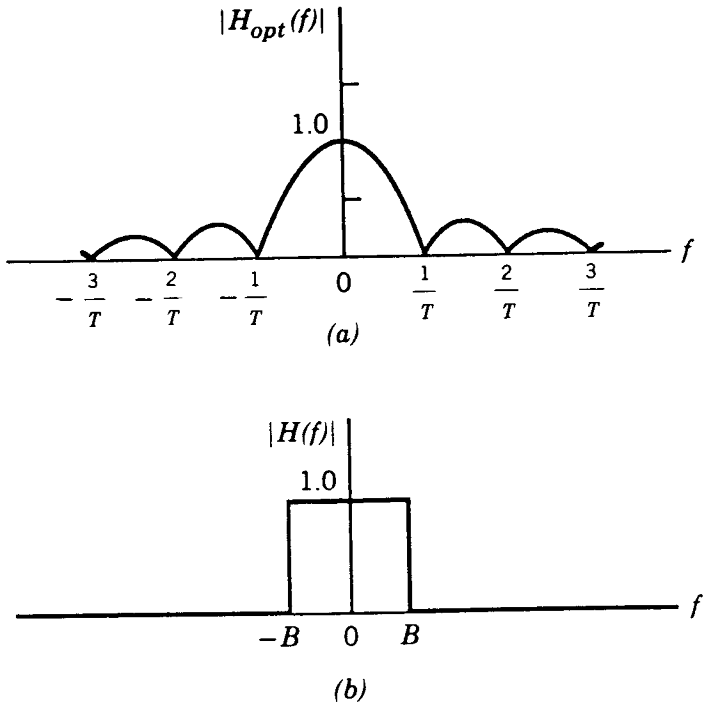


Figure 1

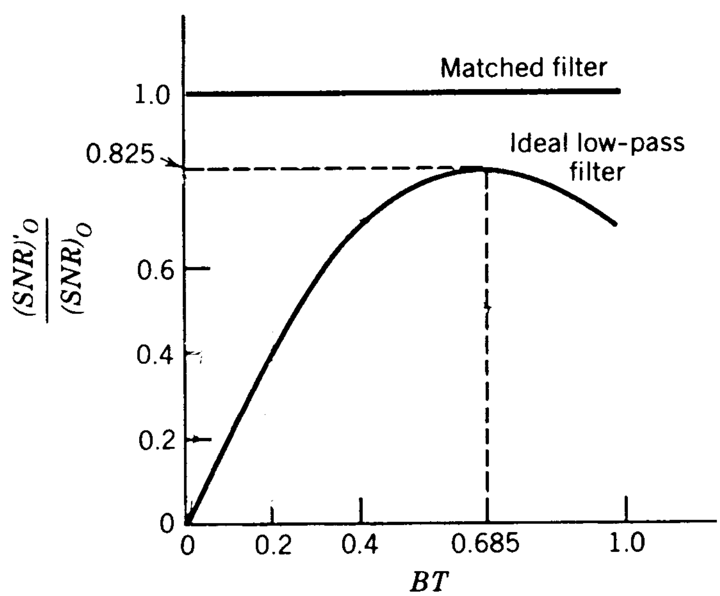


Figure 2