

【課題の解答例】

1.14

ランダム電信信号 $X(t)$ の電力スペクトル密度 $S_X(f)$

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\nu|\tau|) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 \exp(2\nu\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \exp(-2\nu\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2(\nu - j\pi f)} \left[\exp(2(\nu - j\pi f)\tau) \right]_{-\infty}^0 - \frac{1}{2(\nu + j\pi f)} \left[\exp(-2(\nu + j\pi f)\tau) \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2(\nu - j\pi f)} + \frac{1}{2(\nu + j\pi f)} \\ &= \frac{1}{\nu^2 + \pi^2 f^2} \end{aligned}$$

フィルタの電圧伝達関数 $H(f)$

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

フィルタ出力の電力スペクトル密度 $S_Y(f)$

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= |H(f)|^2 S_X(f) \\ &= \frac{1}{(1 + (2\pi fRC)^2)(\nu^2 + \pi^2 f^2)} \end{aligned}$$

フィルタ出力の自己相関関数 $R_Y(\tau)$: 部分分数展開を利用

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \frac{\nu}{1 - 4R^2C^2\nu^2} \left[-\frac{1}{(1/RC)^2 + (\pi f)^2} + \frac{1}{\nu^2 + (\pi f)^2} \right] \text{より} \\ R_Y(\tau) &= \frac{\nu}{1 - 4R^2C^2\nu^2} \left[-2RC \exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right) + \frac{1}{\nu} \exp(-2\nu|\tau|) \right] \end{aligned}$$

1.23

(a) フィルタの伝達関数 $H(f)$

$$H(f) = \frac{j2\pi fL}{R + j2\pi fL}$$

フィルタ出力の電力スペクトル密度 $S_N(f)$

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \frac{N_0}{2} \left| \frac{j2\pi fL}{R + j2\pi fL} \right|^2 \\ &= \frac{N_0}{2} \left[1 - \frac{1}{1 + (2\pi fL/R)^2} \right] \end{aligned}$$

フィルタ出力の自己相関関数 $R_N(\tau)$

$$R_N(\tau) = \frac{N_0}{2} \left[\delta(\tau) - \frac{R}{2L} \exp\left(-\frac{R}{L}|\tau|\right) \right]$$

(b) フィルタ出力の平均 μ_N

$$\mu_N = E[N(t)] = \mu_w H(0) = 0$$

フィルタ出力の分散 σ_N^2

$$\sigma_N^2 = E[(N(t) - \mu_N)^2] = R_N(0) = \infty$$

【講義の要点】

整合フィルタ (p. 248-253)

信号検出問題: 雑音 (通常は受信機内部雑音) の中からパルス信号を検出

AWGN に埋もれたパルス (4.1)

最適フィルタ設計: 雑音の影響を最小にする LTI フィルタ

フィルタ出力 (4.2), 時刻 $t=T$ でサンプリング

信号対雑音電力比のピーク値 (ピーク SNR) (4.3) を最大化

出力波形 (4.4), 瞬時電力 (4.5), 雑音 PSD (4.6), 雑音電力 (4.7), ピーク SNR (4.8)

シュワルツの不等式 (4.9): | 関数の内積 | $\leq$ 各関数のノルムの積 $\sim$ ベクトルと同じ

等号条件 (4.10): 2 つの関数が互いに共役; 定数倍含む

最適フィルタ (MF) = 整合フィルタ (4.14): 伝達関数が入力信号スペクトルの共役,

インパルス応答が入力信号の時間反転 (4.16)

整合フィルタの性質 (p. 251-252)

MF による信号検出では, ピーク SNR は入力信号の波形によらず信号のエネルギーと雑音の PSD の比のみで決まる (4.20)

例 4.1 方形パルスに対する整合フィルタ (p. 252-253)

MF のインパルス応答も方形: 積分器で置き換え (図 4.3) $\sim$ integrate-and-dump 回路

本日の課題: 4.3 (p. 301)

- ・ 提出締切 1/26 (月): 南 6 号館 1F メールボックス S6-4