通信伝送工学第 5 回　情報理論の基礎４：通信路符号化定理（教科書 p. 589-593）

【中間試験】
11 月 25 日（火）10:40-12:10
出題範囲： 通信伝送のモデルと具体例，情報源符号化，データ圧縮，通信路容量，通信路符号
出題内容： 概念・定義の説明，教科書の演習問題（宿題を含む）と類似の問題

【課題の解答】（p. 621）
9.17

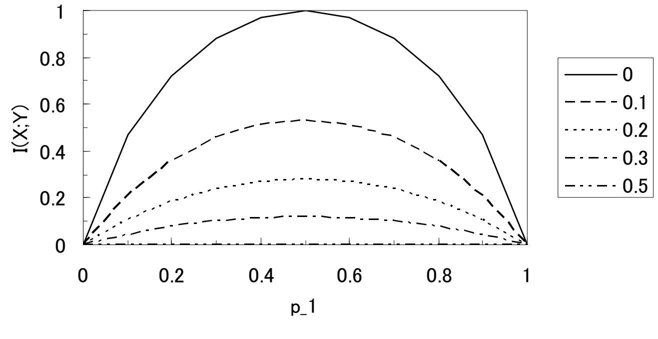
$$p(x_0) = p(x_1) = \frac{1}{2}$$
$$p(y_0) = (1-p)\,p(x_0) + pp(x_1) = \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$$
$$p(y_1) = (1-p)\,p(x_1) + pp(x_0) = \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$$

9.18

$$p(x_0) = \frac{1}{4}, \quad p(x_1) = \frac{3}{4}$$
$$p(y_0) = (1-p)\,p(x_0) + pp(x_1) = \frac{1}{4}(1-p) + \frac{3}{4}p = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p$$
$$p(y_1) = (1-p)\,p(x_1) + pp(x_0) = \frac{3}{4}(1-p) + \frac{1}{4}p = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}p$$

9.19

$$\begin{aligned} I(\mathcal{X};\mathcal{Y}) &= \sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} p(x_j, y_k)\log_2\left(\frac{p(x_j, y_k)}{p(x_j)\,p(y_k)}\right) \\ &= p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p) \\ &\quad -\left[p_1(1-p) + (1-p_1)\,p\right]\log_2\left[p_1(1-p) + (1-p_1)\,p\right] \\ &\quad -\left[p_1 p + (1-p_1)(1-p)\right]\log_2\left[p_1 p + (1-p_1)(1-p)\right] \end{aligned}$$



【講義の要点】
<u>相互情報量 (mutual information, p. 584-587)</u>
X の不確かさ: エントロピー $H(\mathcal{X})$
Y を観測したときの X の不確かさ: 条件付エントロピー $H(\mathcal{X}|y_k)$ (9.40), $H(\mathcal{X}|\mathcal{Y})$ (9.41)
$H(\mathcal{X})-H(\mathcal{X}|\mathcal{Y})$: 通信路出力により減少した不確かさ ≡相互情報量 $I(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (9.43)

通信路容量 (channel capacity, p. 587-589)
相互情報量(9.49)に結合確率(9.38)と周辺確率(9.39)を代入
⇒相互情報量は入力シンボルの発生確率$\{p(x_j)\}$に依存
通信路容量 C: $\{p(x_j)\}$を変化させたときの相互情報量 $I(\mathcal{X};\mathcal{Y})$の最大値 (9.59)
例 9.5: 2 値対称通信路 図 9.10
〜 雑音がない(noise free)とき相互情報量最大，誤り 1/2 で通信路容量ゼロ

通信路符号化定理 (channel-coding theorem, p. 589-593)
通信の信頼度 (level of reliability): 雑音により劣化，誤り率で表現
無線では 10^{-1} ⇒ 10^{-6} 以下に
通信路符号化 (channel coding) 図 9.11: 冗長度 (redundancy) 付与による信頼性向上
符号器 (encoder) と復号器 (decoder)
ブロック符号 (block coding, 10 章): k ビットを n ($>k$)ビットにマッピング (mapping)
符号化率 $r = k/n < 1$
任意の平均誤り率 $\varepsilon\ (\ll 1)$ 以下となる通信路符号化は存在するか？ ⇒ 存在する！
シャノンの第 2 定理 (Shannon's second theorem) ≡ 通信路符号化定理
$H(\mathcal{S})$: アルファベット$\mathcal{S}$のエントロピー [bit]，T_s: 1 シンボルの生成間隔 [s]
⇒ 平均情報レート $H(\mathcal{S})/T_s$ [bit/s]
C: 離散無記憶通信路の通信路容量 [bit]，T_c: 1 シンボルの伝送に必要な時間 [s]
⇒ 単位時間当たり通信路容量 C/T_c [bit/s]
(i) 平均情報レート≦単位時間当たり通信路容量 ⇒ 誤り率を無限に小さくできる符号が存在する
(ii) 平均情報レート＞単位時間当たり通信路容量 ⇒ 誤り率を無限に小さくできる符号は存在しない
通信路符号化定理の特徴 〜 存在定理
- 具体的な符号化を提示するものではない.
- 具体的な誤り率を与えるものではない.

通信路符号化定理の 2 値対称通信路への応用 (p. 591-592)
情報源ビットレート $1/T_s$ [bit/s]
符号化率 r (= T_c/ T_s)
符号器のシンボルレート $1/T_c$ [symbol/s]
通信路容量 C [bit/symbol]
〜 通信路符号化定理: $1/T_s \leqq C/T_c$ ⇒ $r \leqq C$ なら誤りを無限に小さくできる

例 9.6: 繰り返し符号 (repetition coding)
誤り率 p=10^{-2} の 2 値対称通信路 〜 C=0.9192 (9.60)
目標誤り率 $\varepsilon = 10^{-8}$
繰り返し符号: 同じビットを n 回伝送，多数決復号
誤り率 (9.65) 〜 二項分布は誤りの並びのパターン
図 9.12 符号化率と信頼度のトレードオフ
〜 符号化率を無限に小さくしなくても信頼度は向上

本日の課題: なし（中間試験前のため）