(3)微分方程式解法の例

(a) $\dfrac{dy}{dt} = ky$　初期条件は $y(0) = a$

$sY(s) - a - kY(s) = 0$ より $Y(s) = \dfrac{a}{s-k}$

これをラプラス逆変換して、 $y = ae^{kt}$

(b) $\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}$　初期条件は $y(0) = 1$

$sY(s) - 1 + 2Y(s) = \dfrac{1}{s+1}$ より $Y(s) = \dfrac{1}{s+1}$

これをラプラス逆変換して、 $y = e^{-t}$

(c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = \sin t$

関数 $y(t)$ のラプラス変換を $Y(s)$ 、 $t = 0$ における関数とその 1 階微分をそれぞれ $y(0)$ 、 $y'(0)$ とすると、

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - y(0)s - y'(0)$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

であるから、微分方程式のラプラス変換は次のようになる。

$$s^2Y(s) - y(0)s - y'(0) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

この式を整理すると

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{y(0)s + y'(0)}{s^2+4}$$

ここで、 $\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$ を部分分数に展開すると、次の式をえる。

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right)$$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \sin\omega t$ 、 $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos\omega t$ であるから、ラプラス逆変換は次のように求めることができる。

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + y(0)\cos 2t + \frac{y'(0)}{2}\sin 2t$$

$$= \frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{2}\left(y'(0) - \frac{1}{3}\right)\sin 2t + y(0)\cos 2t$$