2-5. 離散フーリエ変換

2-5-1 周期信号のサンプリング

連続的な周期信号 $f(t)$ を、サンプリングした離散的な周期信号 $f_s(t)$ で置き換える。すなわち、サンプリングの周期を T_s 、原信号 $f(t)$ の周期を NT_s とすると、サンプリングした信号 $f_s(t)$ は次の式で表される。

$$f_s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t)(T_s \delta(t - nT_s)) \quad (2.53)$$

T_s がかけてあるのは、サンプリングした信号 $f_s(t)$ をサンプリング間隔 T_s で時間積分した値が、原信号 $f(t)$ の時間積分値とよい近似を与えるようにするためである。

$f_s(t)$ を NT_s の周期関数とみなして複素フーリエ級数で展開すると、そのフーリエ係数は次のようになる。

$$c_k = \frac{1}{NT_s} \int_{-\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f(t)(T_s \delta(t - nT_s)) \right) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.54)$$

積分範囲は原信号の任意の 1 周期 NT_s でよいが、 δ 関数が積分の上限、下限にかからないように微小量 ε だけ移動させている。式(2.54)の積分を実行すると、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} f(t)(T_s \delta(t - nT_s)) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) dt \\ &= \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} T_s f(nT_s) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} nT_s\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

このフーリエ係数で、 k を $k+N$ と置き換えると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} c_{k+N} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} (k+N)n\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \left(\frac{2\pi}{N} kn + 2n\pi\right)\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) = c_k \end{aligned}$$

したがって、式(2.55)のフーリエ係数は N の周期性をもつ。

連続周期信号のスペクトルは離散スペクトルであった。上述のことは、離散周期信号 $f_s(t)$ のスペクトルは離散周期スペクトルになるということの意味する。フーリエ級数によって元の信号を得るためには、周期スペクトルなので $k=0$ から $k=N-1$ まで加算すればよい(同じスペクトルの繰り返しであるから無限に加算したら結果は発散する)。すなわち、

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} nT_s\right) \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} (t - nT_s)\right) \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

すなわち、サンプリング時刻における値 $f(nT_s)$ ($n=0,1,\dots,N-1$) から任意の時刻における関数値 $f(t)$ が計算できる。なお、 $t = mT_s$ なるサンプリング時刻における $f(t)$ を計算すると、確かに $f(mT_s)$ に一致することが次のようにして確かめられる。

$$\begin{aligned}
 f(mT_s) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} (mT_s - nT_s)\right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{N} (m - n)\right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) N \delta_{nm} \\
 &= f(mT_s) \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

式(2.56)で $t = nT_s$ とおくと、次の式を得る。

$$f(nT_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} n\right) \right) \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right) \tag{2.58}$$

ここで、あらためて $f_n = f(nT_s)$ として、

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} n\right) \text{-----離散フーリエ変換} \tag{2.59}$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right) \text{----離散フーリエ逆変換} \tag{2.60}$$

とよぶ。

2-5-2 離散フーリエ変換の定義

離散フーリエ変換は次のようにして定義される。

複素平面上の単位円を N 分割した点は、次の変数 W で定義される。

$$W = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right) \quad (2.61)$$

この W を用いて、離散フーリエ変換、離散フーリエ逆変換は、それぞれ次のように定義される。

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{kn} \quad (2.62)$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W^{-nk} \quad (2.63)$$

信号の値、スペクトルの値がいずれも N 個の離散的なデータで与えられるので、デジタル処理に適したフーリエ級数展開である。さらに、対称性を用いて演算量を低減することで、高速フーリエ変換(FFT)に発展する。