

2-4. シャノンの標本化定理

「周波数帯域がある値以下に制限されている波形は、その波形を一定時間間隔で標本化(サンプリング)して得られる標本値だけで再現できる。ここで、周波数帯域が W [Hz]以下に制限されていれば、 $\frac{1}{2W}$ [sec]ごとに標本化すれば(サンプリング周波数 $2W$ [Hz])、この離散的な信号だけから元のアナログ波形が再現できる。」

[証明]

元の信号を $f(t)$ 、 $\frac{1}{2W}$ [sec]ごとのサンプリング時刻を $t_i = \frac{i}{2W}$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) とする。また、 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ とする。

(i) 周波数帯域が W [Hz]以下に制限されているので、 $|\omega| > 2\pi W$ で $F(\omega) = 0$ である。すなわち、 $F(\omega)$ を $-2\pi W \leq \omega \leq 2\pi W$ でのみ定義された周期 $4\pi W$ の関数と考え、フーリエ級数で展開する。

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{4\pi W} \omega\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) \quad (2.47)$$

$$\text{ここで、} c_n = \frac{1}{4\pi W} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) \exp\left(-j \frac{n}{2W} \omega\right) d\omega \quad (2.48)$$

(ii) $F(\omega)$ のフーリエ逆変換から、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.49) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) \right) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-2\pi W}^{2\pi W} \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2c_n \int_0^{2\pi W} \cos\left(\frac{n}{2W} + t\right) \omega d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2W} + t\right) \omega}{\frac{n}{2W} + t} \right]_0^{2\pi W} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin 2\pi W \left(\frac{n}{2W} + t\right)}{\frac{n}{2W} + t} = 2W \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin 2\pi W \left(t + \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W \left(t + \frac{n}{2W}\right)} \end{aligned}$$

n を書き直すと次式を得る。

$$f(t) = 2W \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} \frac{\sin 2\pi W \left(t - \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W \left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (2.50)$$

一方、フーリエ逆変換の式(2.49)で $t_n = \frac{n}{2W}$ とすると、

$$f(t_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{j\omega \frac{n}{2W}} d\omega$$

式(2.48)と見比べれば、 $f(t_n) = 2Wc_{-n}$ であることがわかる。

すなわち、式(2.50)は次のように書き改めることができる。

$$\therefore f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \frac{\sin 2\pi W \left(t - \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W \left(t - \frac{n}{2W} \right)} \quad (2.51)$$

すなわち式(2.51)から、標本点 $t_n = n/2W$ における標本値 $f(t_n)$ がわかれば、元波形 $f(t)$ は、次の標本化

関数(sinc 関数) $s_n(t)$ と標本値 $f(t_n)$ から再現することができる。

$$s_n(t) = \frac{\sin 2\pi W \left(t - \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W \left(t - \frac{n}{2W} \right)} \quad (2.52)$$

なお、標本化関数 $s_n(t)$ は次の特徴をもつ関数である。

- ・ $s_0(t) = \frac{\sin 2\pi W t}{2\pi W t}$ を $t_n = n/2W$ だけ平行移動した関数である。
- ・ $t_n = n/2W$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) で $s_0(t_n) = \frac{\sin n\pi}{n\pi} = 0$
- ・ $s_0(0) = 1$

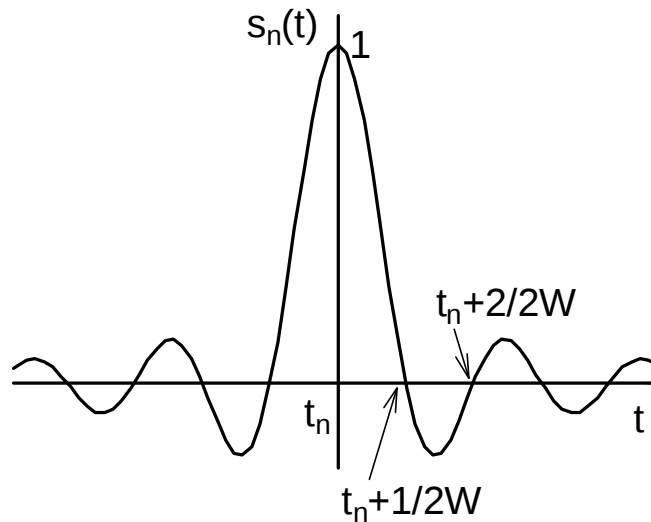


図 2-4 標本化関数 $s_n(t)$