2-2-4 Parsevalの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \qquad (2.21)$$

[証明]

$$\mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy$$

において、ω=0とおくと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(-y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt$$

ここで、$f_2(t) = g(t)^*$とすると、

$$F_2(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j(-\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^* e^{j\omega t} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \right)^* = G(\omega)^* \qquad (2.22)$$

したがって、次の式が成り立つ

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega)^* d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t)^* dt \qquad (2.23)$$

ここで、特に$g(t) = f(t)$とすれば、次のParsevalの等式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

———Parsevalの等式の物理的な意味———

$f(t)$を1Ωの抵抗の両端の電圧とすれば、$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$は1Ωの抵抗が消費する全電力を表す。

これが$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(\omega)|^2}{2\pi} d\omega$に等しいということは、$\frac{|F(\omega)|^2}{2\pi}$がωにおけるスペクトル成分に含まれるエネルギー密度を表しているということを意味する。

2-2-5 時間波形と周波数スペクトルの双対性

時間関数 $f(t)$ をフーリエ変換するとスペクトル密度 $F(\omega)$ が得られる。すなわち、$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$、$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ であるから、時間領域と周波数領域の間には双対関係が存在する。

双対関係の例として、次のことがあげられる。

・時間軸上の１点でのみ非零の値をもつ関数は δ 関数であり、その周波数スペクトルは－∞から∞の周波数軸上で一定値１をもつ。

・一つの周波数成分だけをもつ関数は正弦関数もしくは直流であり、その周波数スペクトルは $\delta(\omega)$ である。このような関数は、時間軸上では－∞から∞で一定の振幅をもつ。

2-2-6 その他

フーリエ変換の結果に負の周波数 ω が含まれることにとまどいを感じるかも知れない。$f(t)$ が実関数の場合には、式(2.2)から次の関係が成り立つ。

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt = F(\omega)^* \qquad (2.24)$$

このとき、フーリエ逆変換で $F(\omega)$ から $f(t)$ を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(-\omega) e^{-j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right)^* + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}\left[F(\omega) e^{j\omega t}\right] d\omega
\end{aligned}$$

すなわち、実関数 $f(t)$ を得るためには、正の周波数の正弦波成分 $e^{j\omega t}$ だけでよいことがわかる。