2-2.フーリエ変換の性質

2-2-1 代表的な関数のフーリエ変換

(1) δ 関数

δ 関数は次の性質をもつ関数として定義される。

(i) $$\delta(t)=\begin{cases}\infty & (t=0)\\ 0 & (t\neq 0)\end{cases} \tag{2.6}$$

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \tag{2.7}$$

(iii)任意の関数 $f(t)$ に対して次の関係が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0) \tag{2.8}$$

$\delta(-t)=\delta(t)$ であるから δ 関数は偶関数である。

δ 関数のフーリエ変換は次のように求まる。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=e^{0}=1 \tag{2.9}$$

すなわち、δ 関数のスペクトルは$-\infty$から∞に広がり、かつ振幅はωによらず一定である。

幅 $2a$ 、振幅 E の単一矩形パルスで $2aE=1$ を保ったまま $a\to 0$ とした極限が δ 関数と一致する。単一矩形パルス(幅 $2a$ 、振幅 E)のフーリエ変換は

$$F(\omega)=2aE\frac{\sin a\omega}{a\omega} \tag{2.10}$$

で与えられるので、$2aE=1$ で $a\to 0$ とすると $\dfrac{\sin a\omega}{a\omega}\to 1$ であるから $F(\omega)=1$ となり、確かに上記の結果と一致する。

一方、$F(\omega)=1$ のフーリエ逆変換は δ 関数に一致するはずであるので、

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}d\omega \tag{2.11}$$

と表現される。

(2)直流 $f(t)=E$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}Ee^{-j\omega t}dt=2\pi E\delta(\omega) \tag{2.12}$$

2-2-2 フーリエ変換の性質

関数 $f(t)$ をフーリエ変換により $F(\omega)$ を求めることを、$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$ と書くことにする。フーリエ変換では次の関係(性質)が成り立つ。

(1)線形性

$$\mathcal{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathcal{F}[f_1(t)]+\beta\mathcal{F}[f_2(t)] \tag{2.13}$$

(2)原関数の移動

$$\mathcal{F}[f(t-\tau)]=\exp(-j\omega\tau)\mathcal{F}[f(t)] \tag{2.14}$$

(3)像関数の移動

$$\mathcal{F}\left[\exp(-jkt)f(t)\right]=F(\omega+k) \tag{2.15}$$

(4)時間軸の拡大

$$\mathcal{F}\left[f(At)\right]=\frac{1}{A}F\left(\frac{\omega}{A}\right) \tag{2.16}$$

(5)時間微分

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right]=(j\omega)^n\mathcal{F}\left[f(t)\right] \tag{2.17}$$

(6)対称性

$$\mathcal{F}\left[F(t)\right]=2\pi f(-\omega) \tag{2.18}$$

2-2-3 畳み込み関数とそのフーリエ変換

次の積分演算を Convolution(畳み込み)という。

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \tag{2.19}$$

$f(t)$ を二つの関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ の畳み込み関数と呼び、 $f=f_1*f_2$ で表す。

畳み込み関数のフーリエ変換は、次のように二つの関数のフーリエ変換の積に等しい。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t')e^{-j\omega(t'+\tau)}dt'\right)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t')e^{-j\omega t'}dt'$$

すなわち、

$$\mathcal{F}[f_1*f_2]=F_1(\omega)F_2(\omega) \tag{2.20}$$