第 2 章　フーリエ変換

2-1.フーリエ変換の基礎

2-1-1 フーリエ変換の定義

$f(t)$を周期Tの周期関数として、$f(t)$のフーリエ級数複素表現を考える。フーリエ級数の複素展開係数$c_n=\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)\exp\left(-jn\dfrac{2\pi}{T}\tau\right)d\tau$を式(1.16)の級数表現に代入すると、次式をえる。

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}\tau\right)d\tau\right)\exp(jn\frac{2\pi}{T}t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)\exp\left(jn\frac{2\pi}{T}(t-\tau)\right)d\tau$$

ここで$\omega_n=n\omega=n\dfrac{2\pi}{T}$とすると、

$$\frac{1}{T}=\frac{\omega_n}{2n\pi}=\frac{n\omega}{2n\pi}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{(n+1)\omega-n\omega}{2\pi}=\frac{\omega_{n+1}-\omega_n}{2\pi}$$

となる。すなわち、$f(t)$は次のように表わされる。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\omega_{n+1}-\omega_n)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)\exp(j\omega_n(t-\tau))d\tau \qquad (2.1)$$

ここで、$T\to\infty$（周期∞）の極限、すなわち孤立波（非周期関数）を考えると、

$$d\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{2\pi}{T}\to 0$$

となるから、ω_nは離散的な変数から連続変数ωになる。また、それにつれて$\sum_{n=-\infty}^{\infty}$は連続変数$\omega$に関する積分で置き換えられ、式(2.1)は次のよう書き換えられる。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\exp(j\omega(t-\tau))d\tau d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau e^{j\omega t}d\omega$$

すなわち、

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (2.2)$$

とおけば、関数$f(t)$は次のように表される。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (2.3)$$

式(2.2)で与えられる$F(\omega)$を$f(t)$のフーリエ変換とよぶ。また、式(2.3)はフーリエ逆変換とよぶ。

周波数ωの正弦波成分$e^{j\omega t}$を振幅$F(\omega)d\omega$だけ含むと考えると、式(2.3)は、全てのωについてこれを加算した結果が関数$f(t)$になるということを表していると解釈することができる。その意味で、$F(\omega)$を$f(t)$のスペクトル密度とよぶこともある。

[注意]
フーリエ変換の定義には次のようなものもある。

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

2-1-2 フーリエ積分

$f(t)$が実関数であるとして$e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t$を用いると、式(2.2)の$F(\omega)$は次のようになる。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt-j\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt=A(\omega)-jB(\omega) \qquad (2.4a)$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt \text{ ：フーリエ余弦変換（} A(-\omega)=A(\omega) \text{）} \qquad (2.4b)$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt \text{ ：：フーリエ正弦変換（} B(-\omega)=-B(\omega) \text{）} \qquad (2.4c)$$

これを用いると、フーリエ逆変換は次のようになる。

$$\begin{aligned} f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)-jB(\omega)\right)\left(\cos\omega t+j\sin\omega t\right)d\omega \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\sin\omega t\right)d\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)\sin\omega t-B(\omega)\cos\omega t\right)d\omega \end{aligned}$$

ここで、第二項の被積分関数はωについて奇関数であるから、第二項の積分は零となり、次式を得る。

$$\begin{aligned} f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\sin\omega t\right)d\omega \\ &=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\sin\omega t\right)d\omega \\ &=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\cos\omega t+\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\sin\omega t\right)d\omega \\ &=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right)d\omega \qquad (2.5) \end{aligned}$$

これを、$f(t)$のフーリエ積分とよぶ。

2-1-3 フーリエ変換の存在

$f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が存在するか否かについて、次の定理がある。

【定理】

$f(t)$ の絶対積分が収束、すなわち $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < \infty$ の場合、$F(\omega)$ が存在する。

$F(\omega)$ は孤立波のスペクトル密度を与え、連続関数である。これに対して、c_n は周期波のスペクトルを与え、離散値をとる。$F(\omega)$ を用いてフーリエ逆変換によって $f(t)$ を計算すると、$f(t)$ が連続な領域では元の関数 $f(t)$ と一致し、$f(t)$ の飛びのある点では $\frac{1}{2}\left(f(t+0)+f(t-0)\right)$ となる。

[注意]

飛びのある点におけるフーリエ逆変換の結果については、フーリエ級数の飛びのある点におけるふるまいと同様である。