粘弾性

- 粘性と弾性の両方の性質を有する

直感的には
噛みかけのチューインガム

ゆっくりと変形	自由に形が変わる	粘性
急速な変形	形が元に戻る	弾性

変形の速さによって弾性的になったり粘性的になったりする．

	弾性	粘性	粘弾性
微視的			●
巨視的			

擬弾性(anelasticity)

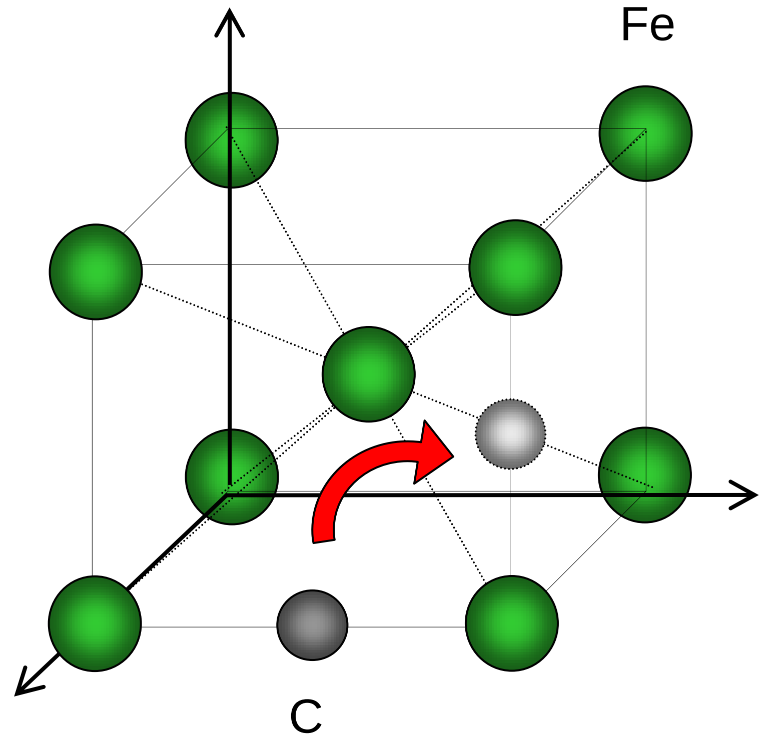
- 弾性変形　：　弾性ひずみは瞬間的に起こる
  擬弾性効果：　弾性ひずみの時間依存性
  (元の形状は記憶している)

  原子拡散に基づく擬弾性

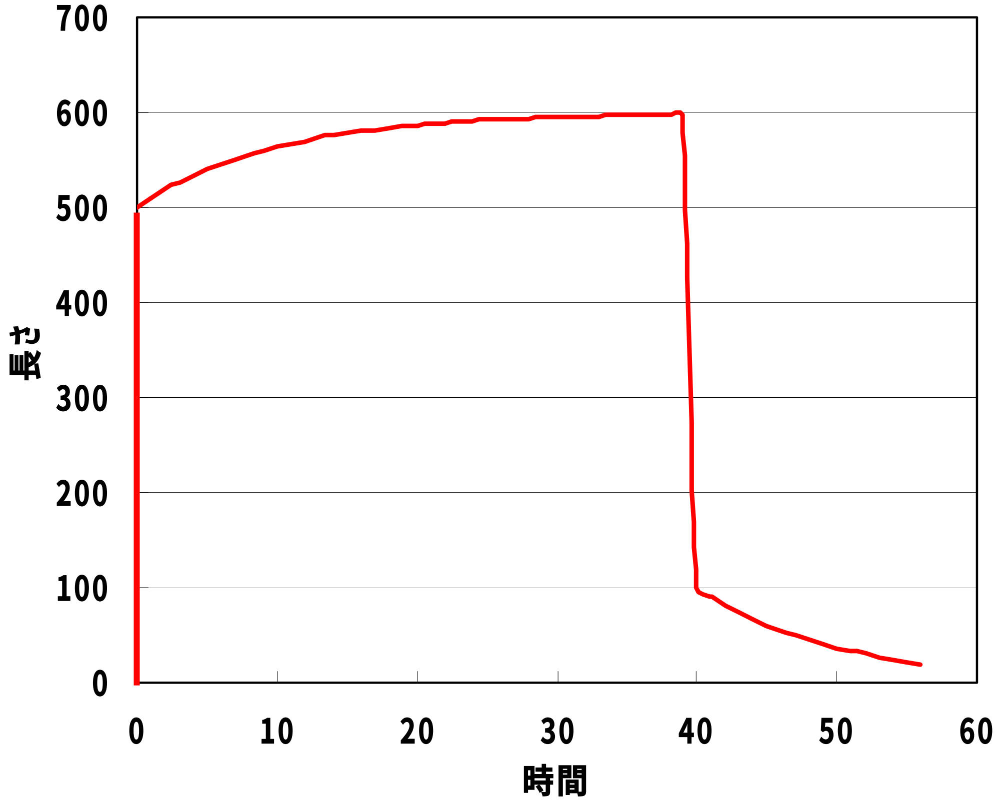
  応力下での鋼中の炭素原子の拡散

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda} \right) \right]$$

λ: 緩和時間

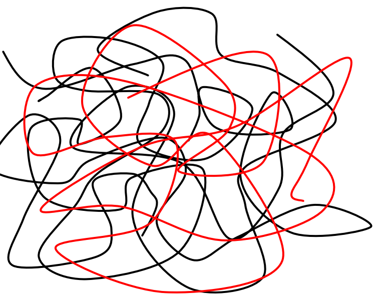


擬弾性効果



高分子材料の粘弾性

分子が長い： トポロジー, からみ合い, 管模型



熱力学的に安定な状態になるのに

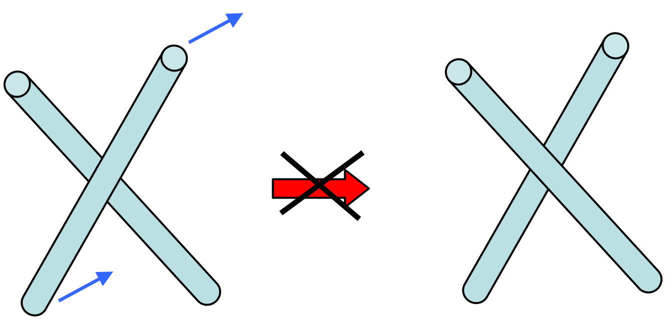
時間がかかる

高分子鎖の形態変化

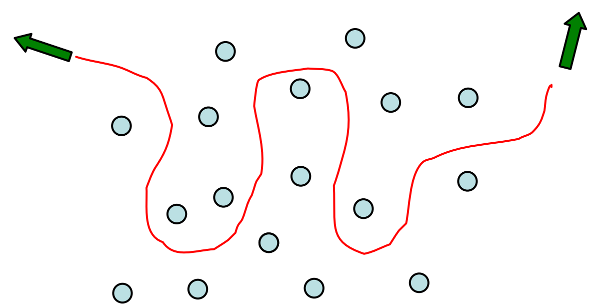
からみ合い, 架橋による構造の記憶

ポテンシャル障壁の中
：　弾性 (元に戻る)

ポテンシャル障壁を越える
：粘性 (流れる)



からみ合い



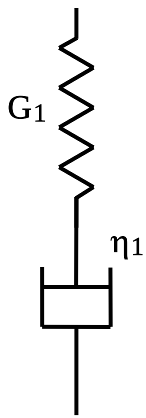
管模型

	弾性	粘性	粘弾性
微視的			
巨視的			●

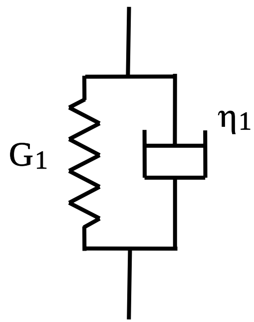
粘弾性の力学模型

バネとダッシュポットの組み合わせ

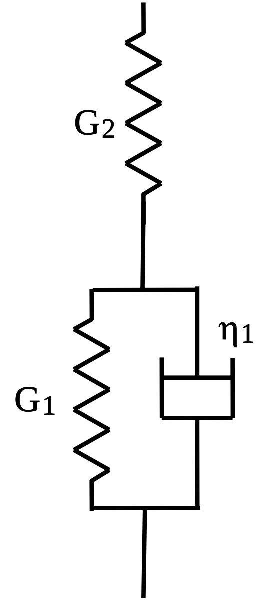
バネ：　弾性要素（ひずみ量に比例した応力）
ダッシュポット：粘性要素（ひずみ速度に比例した応力）



Maxwell モデル
応力緩和
（一定の歪みを加えると応力が徐々に減少する）
永久ひずみが残る



Voigt モデル
クリープ
（一定の応力を加えると歪が徐々に増加する）
永久ひずみは残らない



3要素モデル
永久ひずみは残らない

粘弾性モデルの基礎方程式

フォークトモデルの基礎方程式

$$\sigma = G_1 \varepsilon + \eta_1 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

ここで応力が一定とすると

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{G_1}{\eta_1}\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{G_1}\right) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{G_1}\left\{1 - \exp\left(-\frac{G_1}{\eta_1}t\right)\right\}$$

マックスウェルモデルの基礎方程式： $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{G_1}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta_1}$

ここでひずみが一定とすると

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{G_1}{\mu_1}$$

$$\sigma = G_1 \varepsilon \exp\left(-\frac{G_1}{\eta_1}t\right)$$

線形粘弾性

- 弾性率の線形性と粘弾性の線形性
  線形性とは？

- Boltzmannの重ね合わせの法則
  任意の歪み履歴に対する応力履歴を
  緩和弾性率から求める.

- 周期的歪みに対する応答

緩和弾性率

一般に，弾性率＝応力／ひずみ

緩和弾性率 $G(t) = \lim_{\gamma \to 0} \dfrac{\sigma(t)}{\gamma}$

$$G(t) = G_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$$ **の形のとき**

G_0 :瞬間弾性率
τ :緩和時間

とよぶ

一般に$G(t)$は多くの緩和時間の要素の組み合わせ

$$G(t) = \sum_p G_p \exp(-\frac{t}{\tau_p})$$

あるいは，より連続的な分布を考えると

$$G(t) = \int H(\tau) \exp\{-(t/\tau)\} d(\ln\tau)$$

$H(\tau)$: **緩和時間スペクトル**

線形粘弾性

弾性率の線形性

$\gamma_1 \to \sigma_1$

$\gamma_2 \to \sigma_2$ のとき

$\gamma_1 + \gamma_2 \to \sigma_1 + \sigma_2$ となれば

弾性率に線形性があると言える.

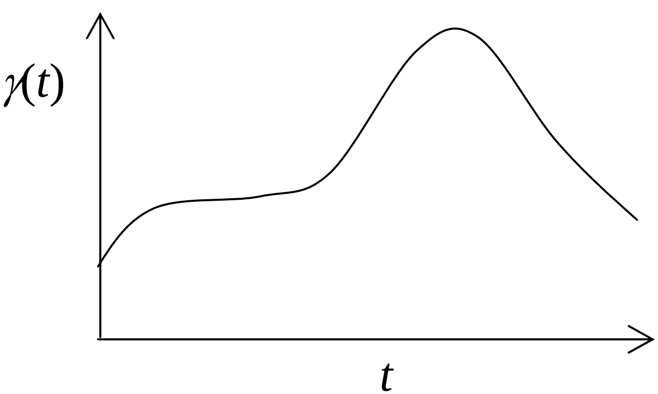
粘弾性の線形性

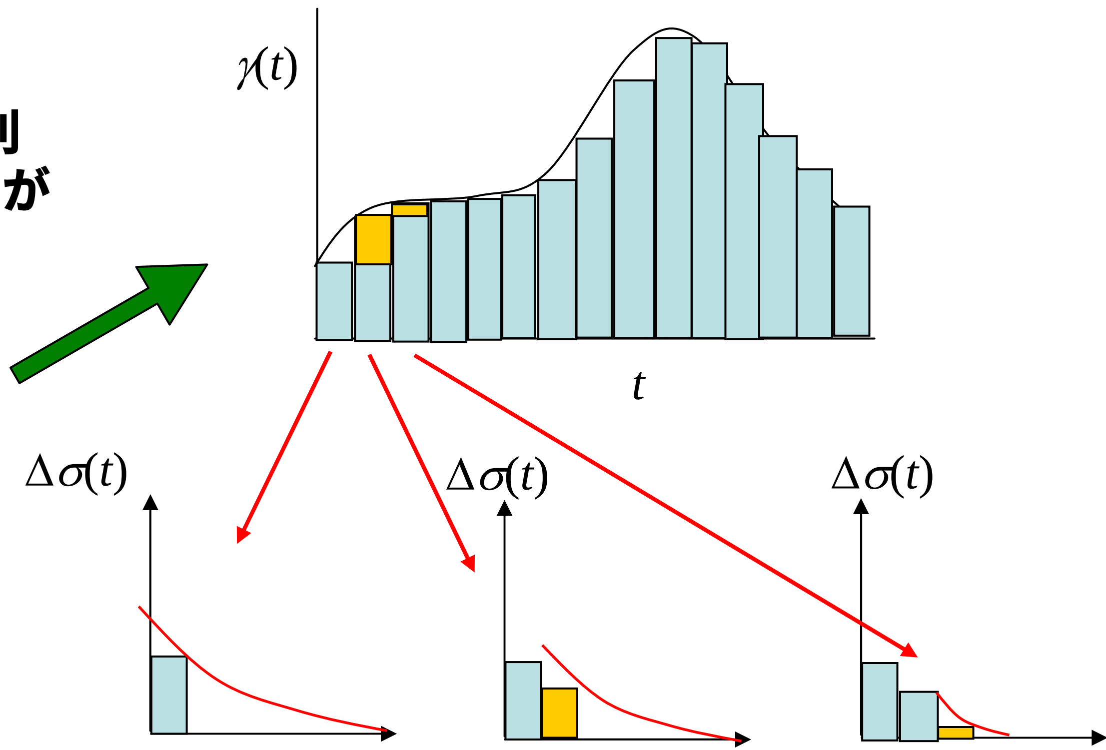
$\gamma_1(t) \to \sigma_1(t)$

$\gamma_2(t) \to \sigma_2(t)$ のとき

$\gamma_1(t) + \gamma_2(t) \to \sigma_1(t) + \sigma_2(t)$

Boltzmannの重ね合わせの法則
⇒任意の$\gamma(t)$に対する応答　$\sigma(t)$が
緩和弾性率から計算できる





応力の足し合わせ

微小ひずみの応答の重ね合わせ

ステップひずみによる応力は

$$\Delta\sigma(t) = G(t-t')\Delta\gamma(t')$$

この総和により時刻 t における応力が定まるから

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')\frac{d\gamma(t')}{dt'}dt'$$

定常粘度： $\dfrac{d\gamma}{dt} = const.$

$$\eta_0 = \frac{\sigma(t)}{d\gamma/dt} = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')dt' = \int_{0}^{\infty} G(t')dt'$$

$G(t) = G_0 \exp(-\dfrac{t}{\tau})$ の場合は

$$\eta_0 = G_0 t$$

周期的ひずみを加えた場合

周期的ひずみ

$$\gamma(t)=\gamma_0\cos(\omega t)$$

弾性体 $\sigma(t)=G\gamma(t)=G\gamma_0\cos(\omega t)$

粘性体 $\sigma(t)=\eta\dfrac{d\gamma(t)}{dt}=-\eta\gamma_0\omega\sin(\omega t)$

形式的に，粘弾性体は

$$\sigma(t)=\gamma_0\left[G'(\omega)\cos(\omega t)-G''(\omega)\sin(\omega t)\right]$$

貯蔵弾性率，損失弾性率

$\gamma(t)=\gamma_0\cos(\omega t)$ **を次式に代入**

$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}G(t-t')\frac{d\gamma(t')}{dt'}dt'$$

$$G'(\omega)=\omega\int_0^\infty G(t)\sin(\omega t)dt$$

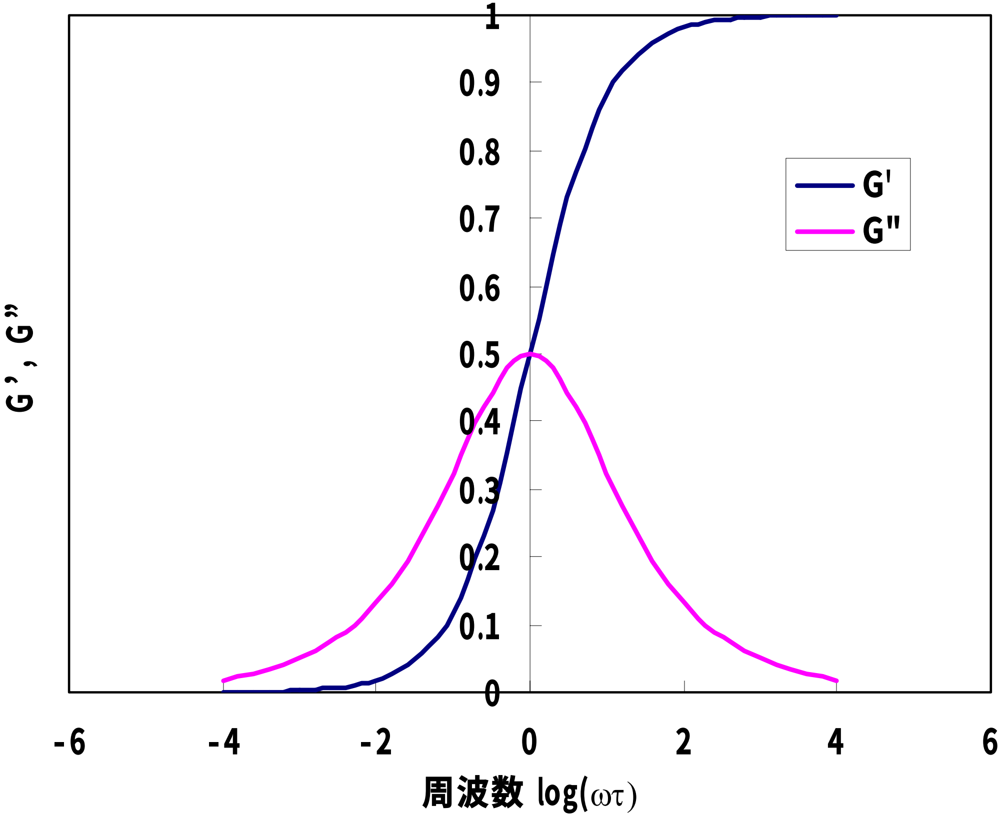
$$G''(\omega)=\omega\int_0^\infty G(t)\cos(wt)dt$$

$G(t)=G_0\exp(-\dfrac{t}{\tau})$ の場合

$$G'(\omega)=\frac{G_0\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$$

$$G''(\omega)=\frac{G_0\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

緩和弾性率と損失弾性率



$$G'(\omega) = \frac{G_0\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$$

$$G''(\omega) = \frac{G_0\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

材料科学B　(鞠谷担当分)　　講義内容のまとめ
材料の力学的性質として，弾性，粘性，粘弾性をとりあげ，それぞれ微視的，巨視的な観点から解説する

	弾性	粘性	粘弾性
微視的	エネルギー弾性 （ポテンシャルエネルギー） エントロピー弾性 温度依存性 異方性 （結晶，高分子材料）	気体の粘性 液体の粘性 温度依存性	擬弾性
巨視的	真応力と真ひずみ 引張弾性率 せん断弾性率, 体積弾性率 ポアソン比 負のポアソン比 重ね合わせの原理	伸長粘度 せん断粘度 ハーゲンポアゼーユの式 体積流量	マックスウェルモデル フォークトモデル 緩和時間
応用展開 （紹介のみ）	異方性材料 テンソル解析	ナビエ・ストークスの方程式	線形粘弾性の一般式