3.5 PERT

3.5.1 アロー・ダイヤグラム

[**問題 3.3**] あるプロジェクトが終了するまでに最低限必要な日数を知りたい．ただし，プロジェクトは作業 A から作業 F の 6 つからなり，それぞれの作業にかかる日数と，その作業を始める前に終了しておかなければならない作業は表 3.1 に示すとおりである．

表 3.1: プロジェクトの例

作業名	制約	所要日数
A	なし	2
B	なし	6
C	A	3
D	A	8
E	B, C	3
F	E	4

上の問題のプロジェクトに対するアロー・ダイヤグラムは図 3.11 のようになる．アロー・ダイヤグラムでは各作業を 1 つの枝に対応させ，例えば作業 A は枝 $(1,2)$ に対応している．

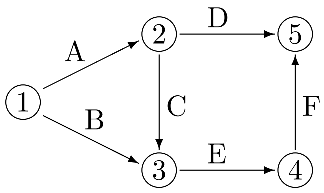

図 3.11: アロー・ダイヤグラムの例

作業順序の関係によっては，正確にアロー・ダイヤグラムを描けない場合もあり，その場合は適宜 __________ と呼ばれる枝を追加する．例を図 3.12 に挙げる．この例では，枝 $(2,3)$ がダミー枝である．

作業名	制約
A	なし
B	なし
C	A
D	A, B

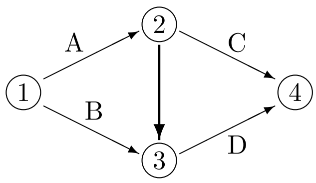

図 3.12: ダミー枝が必要な例

以下では，プロジェクトを表わすネットワークとしてアロー・ダイヤグラムが与えられているとする．また，アロー・ダイヤグラムにおいては，接点の集合は $V=\{1,2,\ldots,m\}$ であり，枝集合 E に対して $(i,j)\in E$ ならば必ず $i<j$ であるとする．したがって，開始点は必ず ________ であり，終了点は ________ である．

3.5.2　所要時間と最早開始時刻

問題 3.3 を解いてみよう．各枝（作業）に長さ（所要時間）が与えられているとすると，プロジェクトの所要時間は，開始点から終了点までの全てのパスにおける ________ である．(ただし，ダミー枝の長さは 0 とする．) 枝 (i,j) の長さを $t_{i,j}$ で表わすと，これは，次のように求められる．

プロジェクトの所要時間の求め方

枝の集合を E，節点の集合を $V=\{1,\ldots,m\}$ とする．$v^e_1=0$ とする．
$j=2,\ldots,m$ について，以下を順に求める．

$$v^e_j=\max_{(i,j)\in E}(v^e_i+t_{i,j})$$

プロジェクトの所要時間は v^e_m である．

v^e_i は，枝 (i,j) に対応する作業 $A_{i,j}$ が開始できる最も早い時刻（________________）である．問題 3.3 については以下のとおり．(図 3.13 を参照.)

(0) $v^e_1=0$.

(1) $v^e_2=v^e_1+t_{1,2}=2$.

(2) $v^e_3=\max(v^e_1+t_{1,3},v^e_2+t_{2,3})=6$.

(3) $v^e_4=$____________________________.

(4) $v^e_5=$____________________________.

図 3.13 では，v^e_j を求める際に最大値をとった枝を太く描いている．開始点から終了点までをつなぐ $(1,3)$,$(3,4)$,$(4,5)$ が最長のパスであり，これを ______________________ と呼ぶ．

[**課題 3.8**]　表 3.2 で表わされるプロジェクトに対し，アロー・ダイヤグラムを作成し，各作業の最早開始時刻とプロジェクトの所要日数を求めよ．(注意：ダミー枝が必要である．)

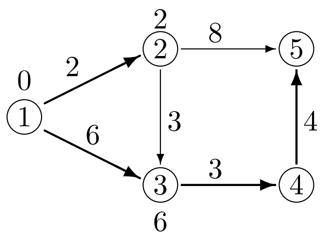

図 3.13: 最早開始時刻と所要時間

表 3.2: プロジェクトの例 2

作業名	制約	所要日数
A	なし	4
B	なし	6
C	A	4
D	A, B	3
E	A	5
F	C, D	2

3.5.3 余裕時間と最遅終了時刻

各作業が予定された所要時間どおりに終了すれば，プロジェクトも予定された所要時間で終了する．しかし，実際には作業時間どおりに終了できず，作業が延長してしまう場合も考えられる．ここでは，プロジェクトを所要時間で終了するという条件で，作業を延長できる最大時間（____________）を考える．

[**問題 3.4**] アロー・ダイヤグラムが図 3.14 で与えられるプロジェクトにおいて，各作業の余裕時間を求めよ．

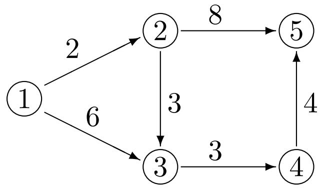

図 3.14: アロー・ダイヤグラムの例 2

明らかに，クリティカルパス上の作業は，余裕時間は 0 である．それ以外の作業について考えよう．余裕時間は，その作業にかかってもよい時間から，予定されている所要時間を引いたものである．作業にかかってもい時間は，その作業を必ず終わらせなければならない時刻から，その作業に取り掛かれる時刻（これを ____________________ と言った）

を引いたものである．したがって，ここではその作業を必ず終わらせなければならない時刻（これを ____________________ と呼ぶ）を求めればよい．

最遅終了時刻の求め方

枝の集合を E，節点の集合を $V = \{1, \ldots, m\}$，所要時間を v_m^e とする．
$v_m^\ell = v_m^e$ とし，$j = m-1, m-2, \ldots, 1$ について以下を順に求める．

$$v_i^\ell = \min_{(i,j)\in E}(v_j^\ell - t_{i,j})$$

作業 (i,j) の最遅終了時刻は v_j^ℓ である．

最早開始時刻と最遅終了時刻から，作業 (i,j) の余裕時間は，____________________ で求められる．問題 3.4 を解くと次のようになる．

(0) 最早開始時刻の求め方から $v_1^e = 0, v_2^e = 2, v_3^e = 6, v_4^e = 9, v_5^e = 13$.

(1) $v_5^\ell = 13$.

(2) $v_4^\ell = v_5^\ell - t_{4,5} = 13 - 4 = 9$.

(3) $v_3^\ell = v_4^\ell - t_{3,4} = 9 - 3 = 6$.

(4) $v_2^\ell = \min($____________________$)=$____________________.

(5) $v_1^\ell = \min($____________________$)=$____________________.

(6) 作業 $A_{1,3}, A_{3,4}, A_{4,5}$ はクリティカルパスに乗っているので余裕時間は 0．またそれ以外の作業 $A_{1,2}, A_{2,3}, A_{2,5}$ の余裕時間はそれぞれ $13-2-8=3, 6-2-3=1, 3-0-2=1$ となる．

ただしこの余裕時間は，ある作業が最早開始時刻に始められると仮定した時の余裕時間である．これを全余裕という．したがって，複数の作業の時間延長が余裕時間の範囲内であっても，プロジェクト全体の所要時間が ____________________．これに対して，別の作業の延長と独立に取れる余裕時間を自由余裕といい，これは $v_j^\ell - v_i^\ell - t_{i,j}$ で求められる．

[**課題 3.9**] アローダイヤグラムが図 3.15 で表わされるプロジェクトに対し，各作業の全余裕時間と自由余裕時間を求めよ．

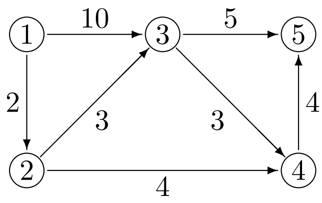

図 3.15: アロー・ダイヤグラムの例 3

3.6 まとめ

代表的なネットワーク最適化問題とその解法：

- 最短路問題 ⋯ ダイクストラ法
- 最大流問題 ⋯ フロー増加法（ラベリング法を使って）
- 最小費用流問題 ⋯ バサッカー・ゴーウェン法，クライン法

PERT：

- アロー・ダイヤグラム ⋯ 作業を枝としてネットワークを作成する
- 所要日数 ⋯ 最早開始時刻を順に求める
- 余裕時間 ⋯ 最遅終了時刻を逆順に求める