

2.4 シンプレックス法

シンプレックス法：効率的に最適基底解を探索する方法．

2.4.1 基本方針

ある問題が基底形式で表されているとする．

1つの初期（実行可能）基底解から始めて，実行可能領域の辺上を，目的関数が減少するように隣の実行可能基底解へと移動して行く（基底を取り替えていく）．つまり，

- 非基底変数の中の1つの非基底変数を0から増加，
- 残りの非基底変数は0のまま維持．

どの変数を基底に入れるか： 目的関数を $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'^T \mathbf{x}_N + c'$ と書き表したときに， $c'_j < 0$ となる x_j を増加させれば目的関数は減少する．したがって，そのような x_j を基底変数に入れる．

どこまで増やせるか： x_j を増加させたときに，元からの基底変数は増減する．

全ての基底変数が増加する場合 ... _____

減少する基底変数がある場合 ... _____

2.4.2 シンプレックスタブロー

目的関数： $-x_1 - x_2 \rightarrow \text{最小化}$

制約条件： $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$

を考える．これは基底形式になっている．目的関数も1つの基底変数 $z (= -x_1 - 2x_2)$ として扱うことにすると，

目的関数： $-x_1 - x_2 - z = 0, \quad z \rightarrow \text{最小化}$

制約条件： $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$

と書ける．このような基底形式を表で表すと，

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	
$-z$	-1	-1	0	0	-1	0
x_3	3	2	1	0	0	12
x_4	1	2	0	1	0	8

のようになる．実は， z 列は常に $(-1, 0, 0)^T$ となるので，以後は省略して

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

と表す．これをシンプレックスタブローとよぶ．

シンプレックスタブローは，下記の性質を持つ．

- 標準形が基底形式で書かれている場合，基底変数に対応する列に単位行列が現れる（この例では， x_3, x_4 が基底変数）．
- z 行も非基底変数の列以外は 0 となる．
- 最右列（ z 行を除く）が全て非負であるとき，タブローは実行可能基底解を与えている．非基底変数をすべて 0 とした場合，基底変数の値は最右列の値になる．また，現在の基底解における目的関数の値については，右上端の値に (-1) をかけた値となる．

この例では，現在，基底変数として (x_3, x_4) が選択されている．シンプレックス法の方針にそって，目的関数が小さくなるように基底を取り替えてみよう．タブローの z の行 $(-1, -1, 0, 0)$ は，現在の非基底変数である x_1 または x_2 を大きくすれば目的関数が _____ なることを示している．

たとえば， x_1 は非基底に残したまま ($x_1 = 0$)， x_2 を大きくする．制約条件の式

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

と $x_1 = 0$ より， $x_3 = 12 - 2x_2$ ．実行可能であるためには $x_3 \geq 0$ より， _____ でなくてはならない．また，もう一つの制約条件式

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

と $x_1 = 0$ より， $x_4 = 8 - 2x_2$ ．実行可能であるためには $x_4 \geq 0$ より， _____ でなくてはならない．したがって， _____ まで x_2 を大きくすることができ

る．実際に x_2 を $\min(12/2, 8/2) = 4$ まで大きくすると，基底変数のうち一つは必ず 0 となる（ここでは，_____）．すなわち， x_2 が基底に入り，変わりに _____ が基底から外れて非基底となる．

タブローで考えると，まず

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	<u>-1</u>	<u>-1</u>	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

下線部を見て基底に入れる（値を 0 から増やす）候補として，負の値を示している x_1 と x_2 を得る．ここでは x_2 を選択することにする（このように選択した列を _____ と呼ぶ．）次に，

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3	<u>2</u>	1	0	<u>12</u>
x_4	1	<u>2</u>	0	1	<u>8</u>

下線部を見て， x_2 が $\min(12/2, 8/2)$ まで大きくできることを得る．したがって， $8/2$ を与える x_4 を基底から外す（このように選択した元基底の行を _____ と呼ぶ．）また，ピボット行とピボット列の交わる要素を _____ と呼ぶ．） x_2 を基底とするには，まずピボット行全体をピボット要素で割る．するとピボット要素は必ず _____ となる．

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
	1/2	1	0	1/2	4

次に，ピボット列の要素がピボット要素を除いて全て 0 になるように，各行からピボット行の何倍かを引く（左基本変形の要領）．

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1/2	0	0	1/2	4
x_3	2	0	1	-1	4
x_2	1/2	1	0	1/2	4

これで，また基底形式を表すタブローとなり，基底変数として (x_2, x_3) を考えればいいことになった．このような操作を _____ と呼ぶ．

z 行に負の値がある限り，ピボット操作を繰り返すことによって，目的関数の値を小さくしていくことができる．

以上をまとめると、シンプレックス法は次のように表せる．

—— シンプレックス法 ——

- (Step 1) 初期基底形式を得る（これについては後述）
- (Step 2) z 行の中で負の値が存在しなければ現在の非基底変数を 0 とおいた基底解が最適解である．
- (Step 3) 負の値が存在する場合，負の値の列を 1 つ選ぶ（ピボット列）．
- (Step 4) ピボット列の中の正の係数を持つ行について，基底解の値を係数で割り，最少の値をとる行を選ぶ（ピボット行）．
- (Step 5) ピボット操作を行って，ピボット要素以外のピボット列の要素を 0 にする．
- (Step 6) Step 2 に戻って繰り返す．

(Step 3) で負の値が複数存在するときには，一般に絶対値の大きい列を選ぶと，少ない繰り返し回数で収束する．

ピボット操作を行うときには，下記の点に注意．

- 右端の列は， z 行以外は全て常に非負．なぜ？
- 右上端の値は必ず _____ する．つまり，目的関数 z の値は必ず _____ ．
- ある行のピボット列の係数が負の場合は，新しく基底にはいる変数を大きくすると，その行に対応する基底変数も大きくなることを示している．したがって，ピボット列の係数がすべて負の場合は，新しく基底にはいる変数をいくらでも大きくでき，非有界となる．

[課題 2.3] 上の例の続きを行い，最適解とその時の目的関数の値を求めよ．

[課題 2.4] 同じ例で，はじめに x_1 を基底に入れて最適解を求めよ．

[課題 2.5] 次の問題をシンプレックス法を用いて解け．

目的関数： $-3x_1 - 2x_2 \rightarrow$ 最小化

制約条件： $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$

$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 4)$