

1. 広義定常の確率過程 $X(t)$ の自己相関関数 $R_X(\tau)$ と電力スペクトル $S_X(f)$ に関する以下の問いに答えよ。ただし、 $X(t)$ の二次確率密度関数を $f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ とする。

(ア) $X(t)$ が広義定常であるための $f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ の条件を示せ。(10 点)

$f_{X(t), X(t+\tau)}(x_1, x_2)$ が t に依存しないこと。

(イ) $R_X(\tau)$ を $f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ を用いて表せ。(10 点)

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t), X(t+\tau)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ をそのまま代入し τ が定義されていない場合 1 点減点

(ウ) $R_X(\tau)$ と $S_X(f)$ の関係式

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) \exp(j2\pi f \tau) df$$

は通常何と呼ばれているか。

[ヒント：単なる「フーリエ変換」では正解としない。] (5 点)

Einstein-Wiener-Khintchine の関係 (定理) または Wiener-Khintchine の関係 (定理)

(エ) $S_X(f)$ がなぜ電力スペクトルと呼ばれるのか、その理由を 5 行程度で述べよ。(10 点)

確率過程 $X(t)$ を伝達関数 $H(f)$ のフィルタに入力するとき、出力される確率過程 $Y(t)$ の電力スペクトルは $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$ で表される。特に $H(f)$ を中心周波数 f_0 、帯域幅 Δf の狭帯域フィルタとすると、出力電力は $E[Y^2(t)] = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) df \approx 2\Delta f S_X(f_0)$ となる。すなわち $S_X(f_0)$ は $X(t)$ が有する周波数 f_0 における単位周波数幅当たりの電力を表すため、電力スペクトルと呼ばれる。

「2 乗しているので電力を表す」ことが述べられていれば 2 点、「単位が W/Hz である」

「 $E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$ である」の何れかが明示されていれば 5 点とした。

2. 電力スペクトルが $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$ の白色ガウス雑音 $W(t)$ を、インパルス応答が

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

で表されるフィルタに入力し、出力として得られる低域通過雑音 $N(t)$ について、以下の問いに答えよ。

なお $\text{sinc } x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ を使用してもよい。またフーリエ変換に関する公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt$$

を使用してよい。[Plancherel の公式]

(ア) フィルタのインパルス応答 $H(f)$ を求めよ。(5 点)

$$\begin{aligned}
H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \int_0^T \exp(-j2\pi ft) dt \\
&= \frac{1}{-j2\pi fT} [\exp(-j2\pi fT) - 1] \\
&= \frac{\exp(-j\pi fT)}{j2\pi fT} [\exp(j\pi fT) - \exp(-j\pi fT)] \\
&= \exp(-j\pi fT) \frac{\sin \pi fT}{\pi fT} = \exp(-j\pi fT) \text{sinc } fT
\end{aligned}$$

(イ) $N(t)$ の電力スペクトル $S_N(f)$ を, $S_w(f)$ 及び $H(f)$ を用いて表せ. (10 点)

$$S_N(f) = |H(f)|^2 S_w(f)$$

(ウ) $N(t)$ の 2 乗平均値 σ_N^2 を N_0 及び T を用いて表せ. (10 点)

$$\begin{aligned}
\sigma_N^2 &= E[N^2(t)] = R_N(0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_w(f) df \\
&= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt \\
&= \frac{N_0}{2} \int_0^T \frac{1}{T^2} dt = \frac{N_0}{2T}
\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}
\sigma_N^2 &= E[N^2(t)] = E[(W(t) * H(t))^2] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} W(t-\tau_1)h(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} W(t-\tau_2)h(\tau_2) d\tau_2\right] \\
&= \frac{1}{T^2} E\left[\int_0^T W(t-\tau_1) d\tau_1 \int_0^T W(t-\tau_2) d\tau_2\right] \\
&= \frac{1}{T^2} E\left[\int_0^T \int_0^T W(t-\tau_1)W(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right] \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_w(t-\tau_1, t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \frac{N_0}{2T}
\end{aligned}$$

最後まで計算ができなくても, $\sigma_N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) df$ が明示されていれば 5 点とした.

3. シュワルツの不等式

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x) \phi_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_2(x)|^2 dx$$

の意味をベクトルとの類似性を用いて説明し, 等号が成り立つ条件を示せ. (10 点, 5 点)

左辺の絶対値の中の積分は, ベクトルの内積を無限次元に拡張した関数 $\phi_1(x)$ と $\phi_2(x)$ との内積の定義式であると考えることができる. シュワルツの不等式は, ベクトルの内積が各々のベクトルの大きさ (ノルム) の積より大きくならないことと等価である. したがって, 等号が成り立つ条件はベクトルが平行, すなわち $\phi_1(x) \propto \phi_2(x)$ の場合となる.

4. パルス信号によりビット列を伝送することを考える. 1 ビットを表す信号 $s(t)$ を, $0 \leq t \leq T$ で

$$s(t) = \begin{cases} +A, & \text{symbol 1} \\ -A, & \text{symbol 0} \end{cases}$$

のように定義する．[補足：これ以外の領域では $s(t) = 0$.] この信号を，インパルス応答が

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

で表されるフィルタに入力し，出力として得られる受信信号 $r(t)$ について，以下の問いに答えよ．

(ア) $|r(t)|^2$ が最大となる時刻とそのときの値を求めよ．(5 点×2)

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^T \pm A h(t-\tau) d\tau \text{ となるので， } t=T \text{ のときに } |r(t)|^2 \text{ は最大となり，}$$

$$r(T) = \int_0^T \pm A \frac{1}{T} d\tau = \pm A, \text{ すなわち } |r(T)|^2 = A^2 \text{ である.}$$

(イ) $h(t)$ は入力 $s(t)$ に白色雑音 $W(t)$ が重畳されたときに，信号対雑音電力比を最大とする性質をもつ．このようなフィルタを何と呼ぶか．(5 点)

整合フィルタ

(ウ) (ア)および問 2 の結果を用いて， $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ の場合のフィルタ出力の信号対雑音電力比の最大値を求めよ．(10 点)

問 2(ウ)より $\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2T}$ ，(ア)より $|r(T)|^2 = A^2$ なので，信号対雑音電力比の最大値は

$$\frac{|r(T)|^2}{\sigma_N^2} = \frac{2A^2T}{N_0} \text{ となる.}$$