

通信伝送工学 中間試験 解答例
2007 年 12 月 11 日 (火)

1. 情報源アルファベット $\mathcal{S} = \{s_0, s_1, \dots, s_{K-1}\}$ のシンボル s_k が確率 p_k の割合で出現するものとする。次の問いに答えよ。

(ア) シンボル s_k の情報量 $I(s_k)$ は以下の性質を満足するように定義されている。□の中に入る適切な語句・数式等を答えよ。

- ・ $p_k = 1$ ならば $I(s_k) = \boxed{(a) 0}$, すなわち自明である現象の情報量は $\boxed{(a) 0}$ となる。
- ・ $0 \leq p_k \leq 1$ ならば, $I(s_k) \geq \boxed{(a) 0}$, すなわちシンボルが出現することによって情報が $\boxed{(b) \text{減少する}}$ ことはない。
- ・ $p_k < p_i$ ならば $I(s_k) \boxed{(c) >} I(s_i)$, すなわち出現しにくいシンボルほど情報量が $\boxed{(d) \text{大きい}}$ 。
- ・ シンボル毎の出現が互いに独立である (情報源が無記憶である) とき, シンボル s_k , s_l が連続して出現する情報量 $I(s_k s_l)$ は $I(s_k)$ および $I(s_l)$ を用いて $I(s_k s_l) = \boxed{(e) I(s_k) + I(s_l)}$ と表される。 (各 6 点×5)

(イ) (ア)の性質を満足する情報量 $I(s_k)$ の定義式を示せ。 (10 点)

(ウ) 情報源アルファベット $\mathcal{S}$ の 1 シンボルが出現するときの情報量の期待値

$$H(\mathcal{S}) = \sum_{k=0}^{K-1} p_k I(s_k) \text{ を情報源エントロピーと呼ぶ。このエントロピーという量がもつ意$$

味を 50 字程度で説明せよ。 (10 点)

(解答例 1) 情報源そのものの性質を表す量であり, 熱力学的エントロピーと同じくアルファベットがランダムなほど大きい値をとる。

(解答例 2) 情報源符号化定理により規定される無損失伝送できる最小の符号長を決定する指標である。

2. 表のようなシンボルと出現確率をもつ離散無記憶情報源を考える。次の問いに答えよ。

シンボル	s_0	s_1	s_2
出現確率	0.5	0.25	0.25

(ア) この情報源アルファベット 1 シンボルがもつエントロピーの値を求めよ。 (10 点)

$$H(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 = \frac{3}{2} [\text{bit}]$$

(イ) この情報源をハフマン符号化し, 符号化効率を求めよ。 (10 点)

$$s_0: 1, s_1: 00, s_2: 01, \bar{L} = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} [\text{bit}], \eta = 1$$

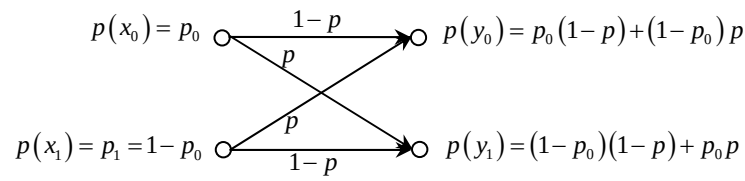
3. 通信路の入力アルファベットを $\mathcal{X}$, 出力アルファベットを $\mathcal{Y}$ とすると, 通信路の相互情報量は $I(\mathcal{X}; \mathcal{Y}) = H(\mathcal{X}) - H(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$ で表される。この定義式の意味を 30 字程度で説明せよ。

(10 点)

通信路の出力から得られる情報量の期待値を表しており, 与えられた情報源に対する通信路の性能を表す量である。

4. 図に示す 2 値対称通信路の相互情報量を誤り確率 p の関数として求め, これを用いて通信路容量 C とこれを実現する情報源のシンボル出現確率を求めよ。 (10 点×2)

$$I(\mathcal{X};\mathcal{Y}) = \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log_2 \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) p(y_j)} \text{ を用いる.}$$



結合確率

$$p(x_0, y_0) = p_0(1-p)$$

$$p(x_0, y_1) = p_0 p$$

$$p(x_1, y_0) = (1-p_0)p$$

$$p(x_1, y_1) = (1-p_0)(1-p)$$

これより

$$\begin{aligned} I(\mathcal{X};\mathcal{Y}) &= p_0(1-p) \log_2 \frac{p_0(1-p)}{p_0 \{p_0(1-p) + (1-p_0)p\}} \\ &\quad + p_0 p \log_2 \frac{p_0 p}{p_0 \{(1-p_0)(1-p) + p_0 p\}} \\ &\quad + (1-p_0)p \log_2 \frac{(1-p_0)p}{(1-p_0) \{p_0(1-p) + (1-p_0)p\}} \\ &\quad + (1-p_0)(1-p) \log_2 \frac{(1-p_0)(1-p)}{(1-p_0) \{(1-p_0)(1-p) + p_0 p\}} \\ &= - \left[p(y_0) \log_2 p(y_0) + \{1-p(y_0)\} \log_2 \{1-p(y_0)\} \right] \\ &\quad + (1-p) \log_2 (1-p) + p \log_2 p \end{aligned}$$

第 1 項は出力エントロピーで $p(y_0) = \frac{1}{2}$ のときに最大値 1 をとる. このとき情報源の出現確

率は $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ となる. 通信路容量は

$$C = 1 + (1-p) \log_2 (1-p) + p \log_2 p$$

となる.