通信伝送工学第 7 回　補足資料
（質問が多かったので改めて教科書に忠実に説明します.）

通信路符号化定理 (p. 590-591)

ここでの議論はブロック符号に限定してよい．ブロック符号では情報系列を k ビット長のブロックに分割し，これを n ビット長のブロック（$n > k$）に射影する．すなわち，符号化器により $n–k$ ビットの冗長ビットが付加されたことになる. このとき, k/n は符号化率と呼ばれ, 記号 r で表す. 定義より $r < 1$ である．与えられた k に対して符号化率（すなわち符号化の効率）はブロック長 n を無限に長くすればゼロに収束する.

受信側で元の情報源系列を正確に再生するためには，シンボル誤りの平均確率を任意に小さくする必要がある．このことに関して重要な疑問が生じる：情報ビットの誤り率を任意の（小さい）正の値ε未満とし，しかも符号化率が必要以上に小さくならない効率のよい通信路符号化が存在するだろうか？この本質的な疑問に対する答えは明らかに「イエス」である．もちろん，この疑問に対する回答は通信路容量 C に対するシャノンの第 2 定理により与えられている．これまでの通信路容量に関する議論の中では時間の概念は重視していなかった．ここで，離散無記憶情報源が情報源アルファベット$\mathcal{S}$とエントロピー$H(\mathcal{S})$ [bit/symbol]を有するものとする．情報源が時間間隔 T_s [s]毎にシンボルを発生すると仮定する．すなわち，情報源の平均情報レートを $H(\mathcal{S})/T_s$ [bit/s]とする．復号器は情報源と同じ T_s [s]毎に情報源アルファベット$\mathcal{S}$のシンボルを出力する．離散無記憶通信路の通信路容量を 1 回の通信路使用当たり C [bit]とし，1 回の使用時間を T_c [s]とする．したがって，単位時間当たりの通信路容量は C/T_c [bit/s]となり，これが通信路を伝送できる最大の情報伝送レートとなる．これらの値を用いて通信路符号化定理として知られるシャノンの第 2 定理を適用する.

特に離散無記憶通信路に通信路符号化定理を適用すると次の 2 つの部分に分けられる.

(i) 離散無記憶情報源が情報源アルファベット$\mathcal{S}$とエントロピー$H(\mathcal{S})$ [bit/symbol]を有し，T_s [s]毎にシンボルを発生するものとする. 離散無記憶通信路の通信路容量を 1 回の通信路使用当たり C [bit]とし，1 回の使用時間を T_c [s]とする．もしも，

$$\frac{H(\mathcal{S})}{T_S} \le \frac{C}{T_c} \tag{9.61}$$

ならば, 受信側で再生される情報源出力の誤り率を任意に小さくできる符号化法が存在する．このとき，C/T_c を臨界レートと呼ぶ．式(9.61)の統合が成立するとき，システムは臨界レートで伝送しているという.

(ii) 逆に，

$$\frac{H(\mathcal{S})}{T_S} > \frac{C}{T_c}$$

となる場合は, 受信側で再生される情報源出力の誤り率を任意に小さくできる符号化法は存在しない.

通信路符号化定理の 2 値対称通信路への応用 (p. 591-592)

離散無記憶情報源が等確率の 2 値シンボルを時間間隔 T_s [s]毎に発生するものとする. このとき, 情報源エントロピーは 1 [bit/symbol]となり，情報源の情報レートは $1/T_s$ [bit/s]となる．情報源が発生した情報系列を符号化率 r の通信路符号器に入力し，通信路符号器が T_c [s]間隔でシンボルを出力する．すなわち，符号化されたシンボルの伝送レートは $1/T_c$ [symbol/s]となる．通信路符号器は 2 値対称通信路を T_c [s]間隔で使用する．すなわち，単位時間当たりの通信路容量は C/T_c [bit/s]となる．ただし，C は通信路遷移確率 p により，式(9.60)のように表される．通信路符号化定理(i)より，

$$\frac{1}{T_S} \le \frac{C}{T_c} \tag{9.62}$$

ならば適切な通信路符号化法を用いて誤り率を任意に小さくすることが可能である．一方，T_c/T_s

は通信路符号器の符号化率 r と等しくなる．したがって，式(9.62)は，

$$r \leq C \qquad (9.64)$$

と書き直すことができる．すなわち，$r \leq C$ ならば誤り率を任意に小さくできる符号化法が存在する．

【講義での説明】

情報源のビットレート $1/T_s$ [bit/s]

符号化率 r ($= T_c/T_s$) <u>[bit/symbol]</u>　*（質問には無次元と回答したがこちらが正しい）*

符号器のシンボルレート $1/T_c$ [symbol/s]

通信路容量 C [bit/symbol]

〜 通信路符号化定理: $1/T_s \leqq C/T_c \Rightarrow r \leqq C$ なら誤りを無限に小さくできる

ブロック符号のアナロジー

情報	⇒	情報　|冗長	⇒	情報 |冗長

（注）符号化率の単位が，ブロック符号の説明（無次元）と2値対称通信路の説明（bit/symbol）で異なるのは，前者では冗長「ビット」を情報量としてカウントしているのに対して，後者では情報と冗長分を合算してシンボルとしてカウントしているために生じる．

　厳密に言えば，前者の説明が正しくない．冗長「ビット」は情報ビットから一意に決定されるので，符号化前も符号化後も情報量は変化しておらず，符号語（シンボル）の長さだけが変化しているためである．したがって，本来であれば前者についても情報ビット数 k を符号化後のシンボル数 n で割ったものが符号化率 r であるといえる．