

確率と統計(0)

「多次元の確率分布(第7章)」

- 担当教員: 杉山 将 (計算工学専攻)
- 居室: W8E-505
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp
- 授業のウェブサイト:
<http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/>

- X, Y : 独立な確率変数
- $g(x), h(y)$: それぞれの確率密度関数
- $Z = X + Y$ の確率密度関数 $k(z)$ は

$$k(z) = \int g(x)h(z - x)dx$$

$$y = z - x$$

- これを畳み込み(convolution)とよび,

$$k = g * h$$

で表す.

畳み込みの例

210

- さいころ1の出る目 X

$$g(x) = \frac{1}{6} \text{ for } x = 1, 2, \dots, 6$$

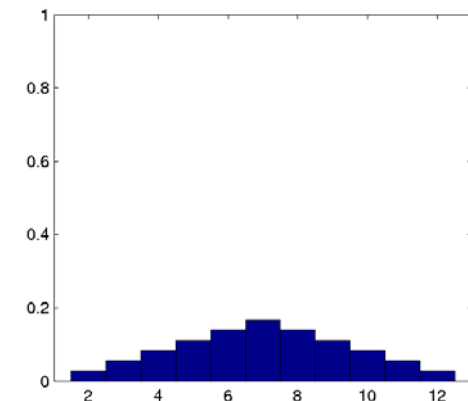
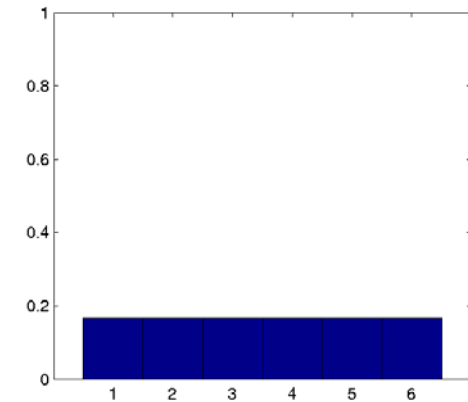
- さいころ2の出る目 Y

$$h(y) = \frac{1}{6} \text{ for } y = 1, 2, \dots, 6$$

- 二つのさいころの出る目の和 $Z = X + Y$

$$k(z) = \frac{6 - |7 - z|}{36}$$

$$\text{for } z = 2, 3, \dots, 12$$



- 再生的(reproductive): 同じ種類の確率分布同士の畳み込みの結果が再び同じ種類の確率分布になる
- 再生的な確率分布族の例:
二項分布, ポアソン分布, 負の二項分布
正規分布, ガンマ分布など

1. 独立な X, Y の和 $Z = X + Y$ の積率母関数は

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

と表すことができることを証明せよ.

2. 正規分布の再生性を証明せよ.

ヒント: 正規分布の積率母関数は

$$M_X(t) = \exp(\mu_X t + \sigma_X^2 t^2 / 2)$$

2次元正規分布

213

- μ : 2次元ベクトル
- Σ : 2次元正値対称行列

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2}(z - \mu)^\top \Sigma^{-1}(z - \mu) \right)$$

- 期待値:

$$E(z) = \mu$$

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- 分散共分散行列:

$$\begin{aligned} V(z) &= E\{ [z - E(z)][z - E(z)]^\top \} \\ &= \Sigma \end{aligned}$$

正値行列: 全ての固有値が正

2次元正規分布(続き)

214

■ $f(x, y)$ が確率密度関数であることの証明

- $f(x, y) \geq 0$ は明らか
- 以下, $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = 1$ を証明する.

そのために, まず正値対称行列 Σ には平方根行列 $\Sigma^{\frac{1}{2}}$ が存在することを示す. 固有値分解により,

$$\Sigma = \lambda_1 \phi_1 \phi_1^{\top} + \lambda_2 \phi_2 \phi_2^{\top}$$

と表すことができる. 但し, λ_1, λ_2 は固有値で ϕ_1, ϕ_2 はそれに対応する固有ベクトルである.

$$\|\phi_1\| = \|\phi_2\| = 1 \quad \langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 0$$

正値行列の固有値は全て正なので, その平方根は常に存在する.

2次元正規分布(続き)

215

よって,

$$\Sigma^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda_1} \phi_1 \phi_1^\top + \sqrt{\lambda_2} \phi_2 \phi_2^\top$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} x - \mu_X \\ y - \mu_Y \end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

と変数変換すれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Sigma^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

$$|J| = |\Sigma|^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) |J| dv du$$

$$= \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{2\pi |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{2}\right) dv du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv$$

$$= 1$$

2次元正規分布 (続き)

216

■ 期待値の証明:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} x - \mu_X \\ y - \mu_Y \end{pmatrix}$$

と変数変換すれば, u, v は独立に標準正規分布に従う
(前頁の証明参照). 従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Sigma^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

より

$$E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Sigma^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} E[u] \\ E[v] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

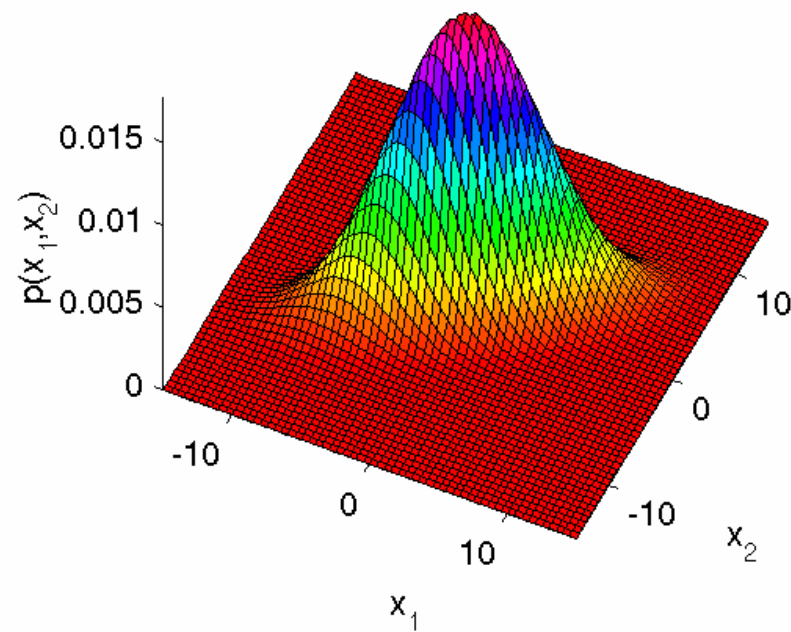
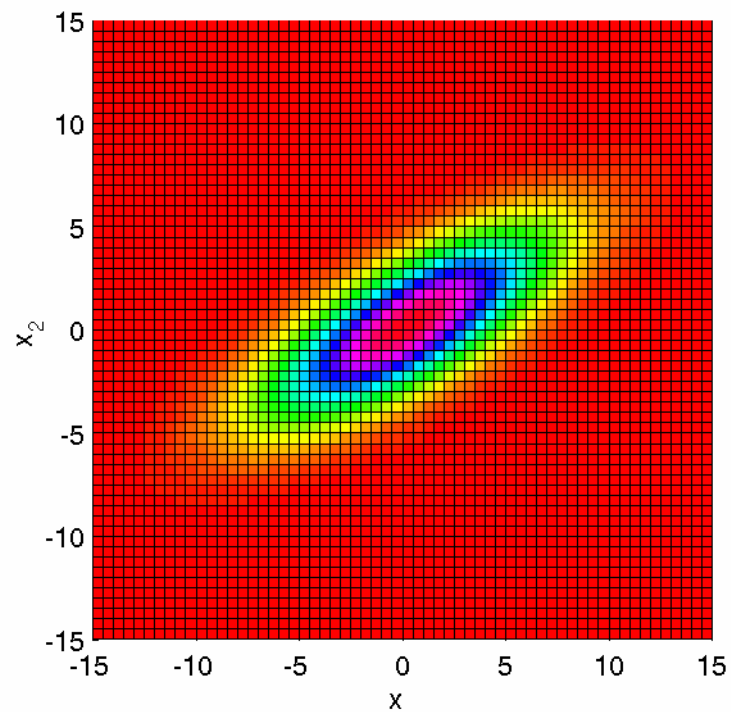
■ 分散共分散行列の証明は宿題!

2次元正規分布の例

217

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$



一般の多次元正規分布

218

- μ : d 次元ベクトル
- Σ : d 次元正値対称行列

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x} - \mu) \right)$$

- 期待値: $E(\boldsymbol{x}) = \mu$

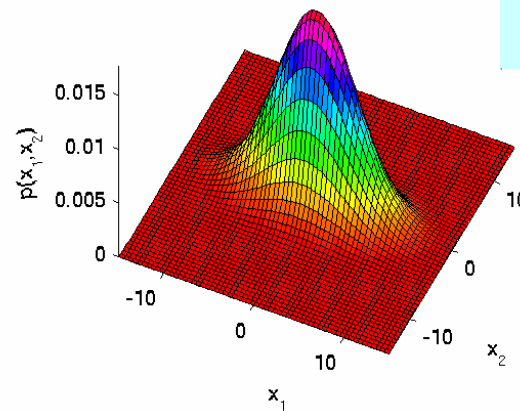
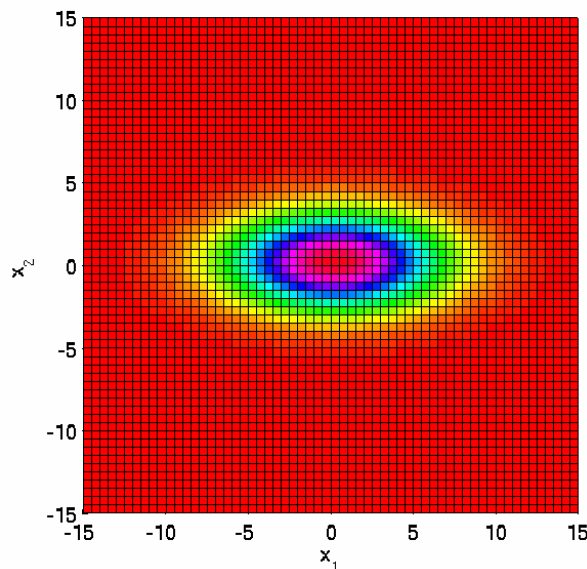
- 分散共分散行列: $V(\boldsymbol{x}) = \Sigma$

多次元正規分布の特別な場合 219

- 共分散がゼロ, 即ち $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_d^2)$ のとき

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \prod_{i=1}^d \sigma_i} \exp \left(- \sum_{i=1}^d \frac{(x^{(i)} - \mu^{(i)})^2}{2\sigma_i^2} \right)$$

$\text{diag}(a, b, \dots, c)$: $a, b, \dots, c$ を対角成分に持つ対角行列



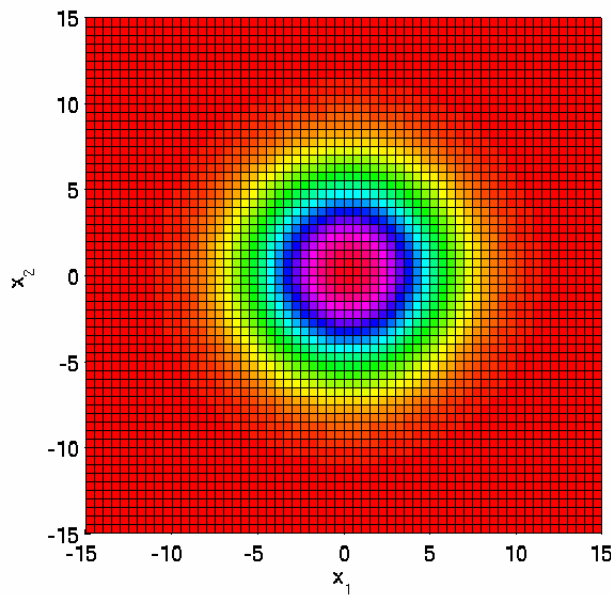
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(d)} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \\ \vdots \\ \mu^{(d)} \end{pmatrix}$$

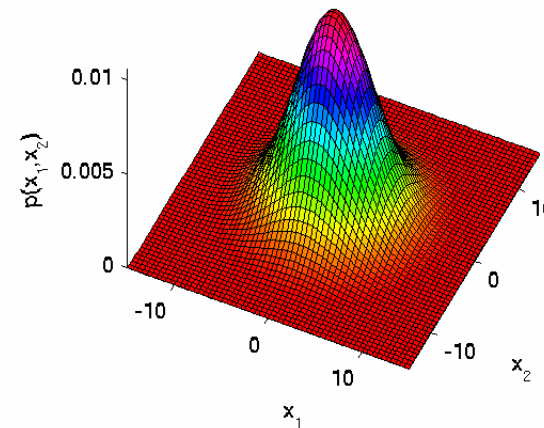
多次元正規分布の特別な場合 (続き)²⁰

- さらに全ての分散が等しい, 即ち $\Sigma = \sigma^2 I$ のとき

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \exp \left(-\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{2\sigma^2} \right)$$



I : 単位行列



1. 2次元正規分布

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi |\Sigma|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (z - \mu)^\top \Sigma^{-1} (z - \mu) \right)$$

の分散共分散行列が

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$V(z) = \Sigma$$

で与えられることを証明せよ.

宿題(続き)

222

2. Octaveなどを使い, 2次元正規分布の確率密度関数のグラフ(3次元)を作成せよ. そして, 分散共分散行列をいろいろと変化させ, 正規分布の形がどのように変化するか調べよ.

ヒント: 共分散行列の固有方程式

$$\Sigma \phi = \lambda \phi$$

を解き Σ を固有値分解せよ.

$$\Sigma = \lambda_1 \phi_1 \phi_1^\top + \lambda_2 \phi_2 \phi_2^\top$$

Octaveではeig関数で固有値・固有ベクトルを計算できる