

確率と統計(0)

「連続型確率分布の例(第6章)」

補足資料

- 担当教員: 杉山 将 (計算工学専攻)
- 居室: W8E-505
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp
- 授業のウェブサイト:
<http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/>

■ ガンマ分布(Gamma distribution)

$$\lambda > 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

■ ガンマ関数

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x) dx > 0$$

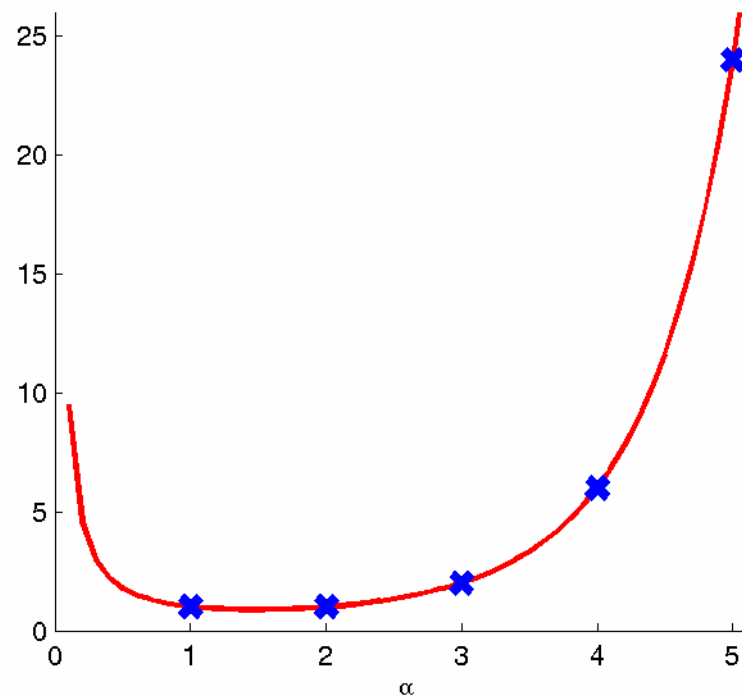
- 故障確率が一定の機械が α 回故障するまでの時間はガンマ分布に従う.

ガンマ関数

128

- ガンマ関数は階乗の一般化:
整数の α に対して

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$



ガンマ分布(続き)

129

■ $f(x)$ が確率密度関数であることの証明

- $f(x) \geq 0$ は明らか
- $y = \lambda x$ とおけば,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x) dx &= \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \exp(-y) \frac{1}{\lambda} dy \\ &= \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} \exp(-y) dy \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}\end{aligned}$$

従って,
$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$$

ガンマ分布の性質

130

■ 期待値:

$$E(X) = \alpha/\lambda$$

■ 分散:

$$V(X) = \alpha/\lambda^2$$

■ 積率母関数:

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha$$

■ 証明は宿題.

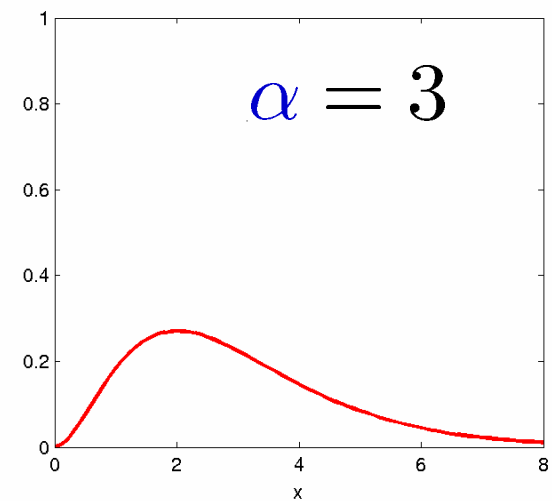
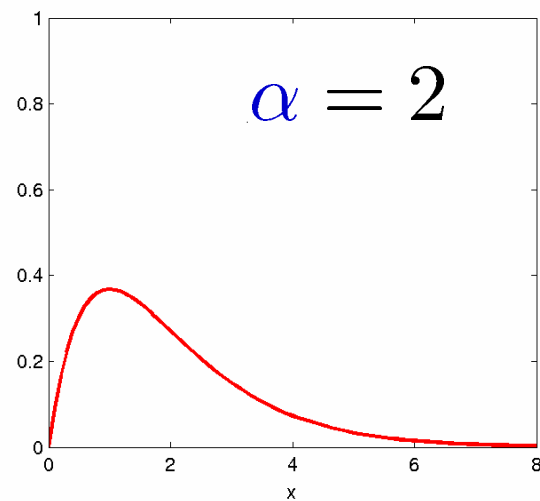
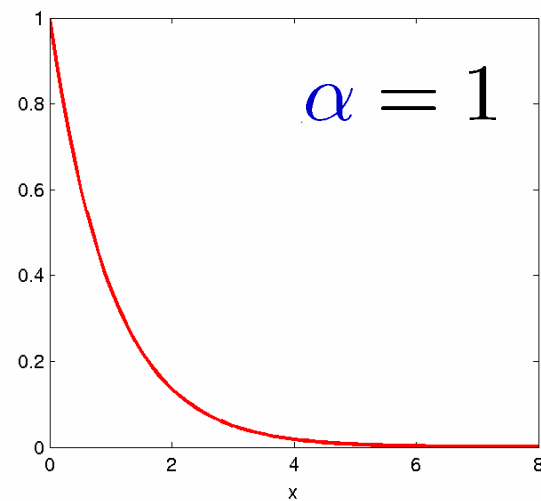
■ α, λ で指定されるガンマ分布を $Ga(\alpha, \lambda)$ で表す

■ $\alpha = 1$ のとき, 特に**指数分布(exponential distribution)**と呼ぶ

ガンマ分布の例

131

$$\lambda = 1$$



- 確率変数 X_i が独立に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

はガンマ分布 $Ga(n/2, 1/2)$ に従う

- このガンマ分布 $Ga(n/2, 1/2)$ を特に, 自由度 n の χ^2 (カイ二乗) 分布(chi-squared distribution)と呼ぶ

- ベータ分布(Beta distribution) $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}/B(\alpha, \beta) & (0 < x < 1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

- ベータ関数

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

- 独立に一様分布 $U(0, 1)$ に従う確率変数を大きさの順に並べ替えたときの小さい方から m 番目の確率変数はベータ分布に従う
- $f(x)$ が確率密度関数であることは明らか

ベータ分布の性質

134

■ 期待値:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

■ 分散:

$$V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

■ α, β で指定されるベータ分布を $Be(\alpha, \beta)$ で表す

■ $\alpha = \beta = 1$ のとき, 特に**連続一様分布(uniform distribution of continuous type)**と呼び, $U(0, 1)$ で表す

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare E(X) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \left\{ \left[\alpha x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \right]_0^1 + \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta} dx \right\} \\
 &= \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} (1-x) dx \quad \text{(部分積分)} \\
 &= \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \left\{ \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx - \int_0^1 x x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \right\} \\
 &= \frac{\alpha}{\beta} \{1 - E(X)\}
 \end{aligned}$$

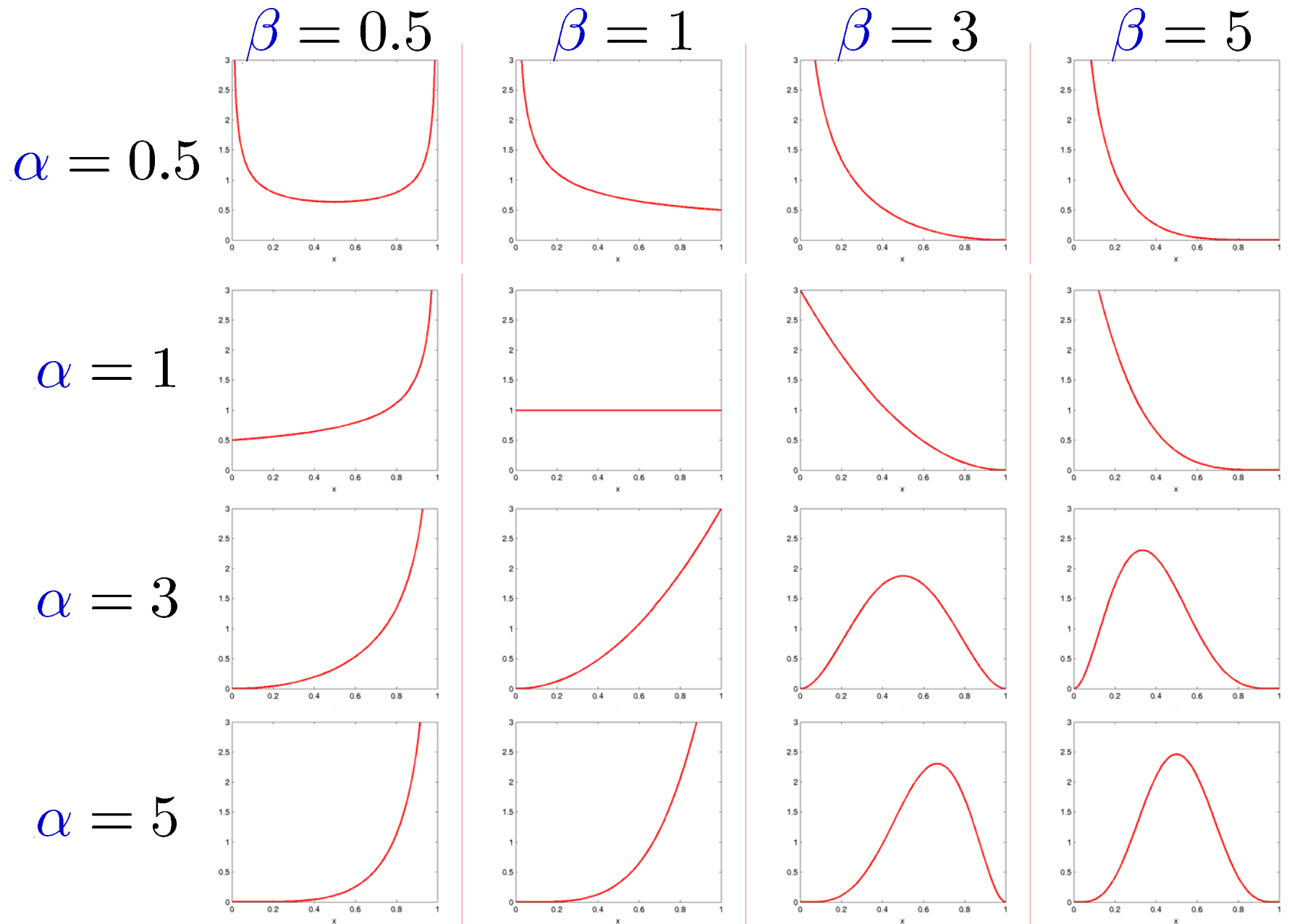
これより, $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$

■ 分散の証明は宿題

$$(1-x)^{\beta-1} = \frac{d}{dx} \left\{ -\frac{(1-x)^{\beta}}{\beta} \right\}$$

ベータ分布の例

136



コーシー分布

137

- コーシー分布(Cauchy distribution) $\alpha > 0$

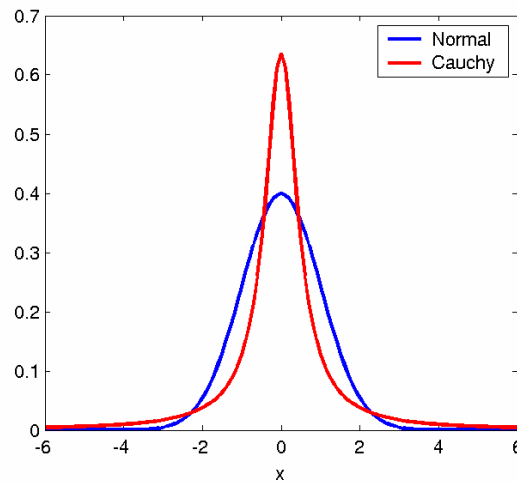
$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + (x - \lambda)^2)}$$

- 標準正規分布に独立に従う確率変数 X, Y の比 X/Y はコーシー分布に従う

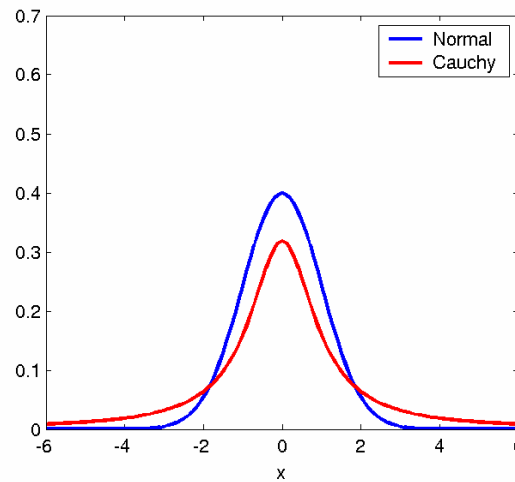
コーシー分布の性質

138

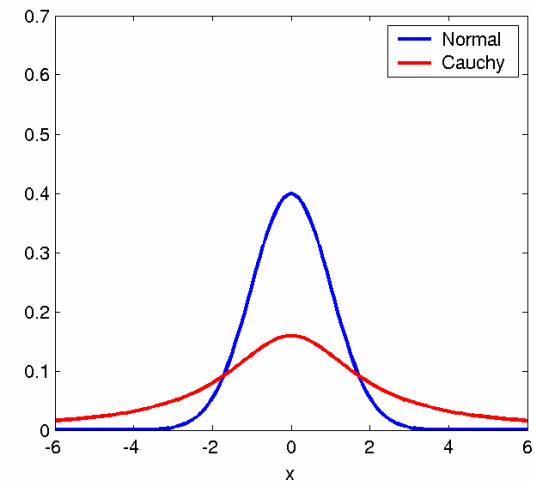
- コーシー分布は見た目が正規分布と似ているが、正規分布と異なり期待値と分散が存在しない



$\alpha = 0.5$



$\alpha = 1$



$\alpha = 2$

コーシー分布の期待値について¹³⁹

- 定義より, コーシー分布の期待値は $\alpha = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$$

- 被積分関数は奇関数なので一見期待値はゼロに見えるが, 実際には期待値は存在しない. なぜなら以下の積分が共に存在しないからである

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$$

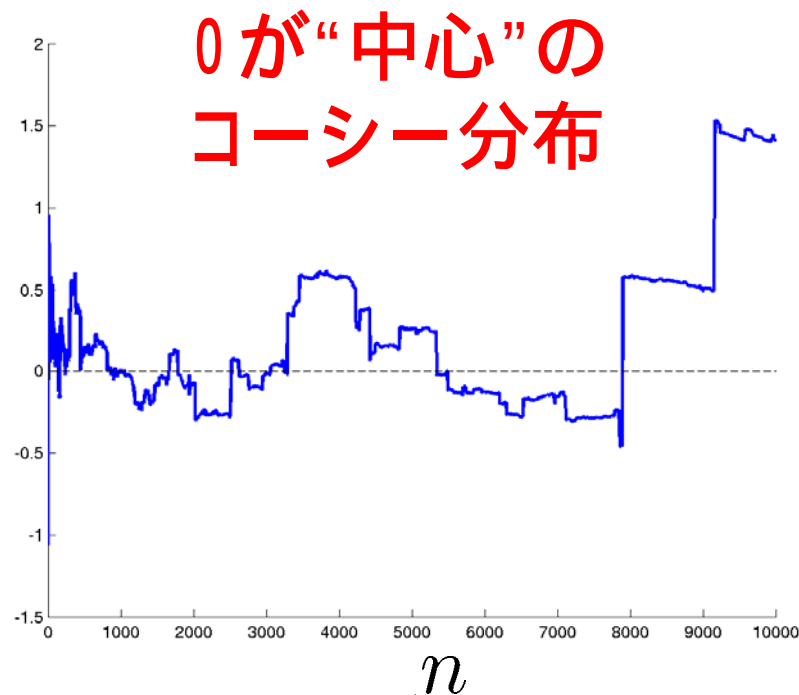
- この事は, 後に示す**大数の法則**(標本平均は, 標本数を増やせば本当の期待値に収束する)からもわかる

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \mu$$

コーシー分布の期待値について(続き)¹⁾⁴⁰

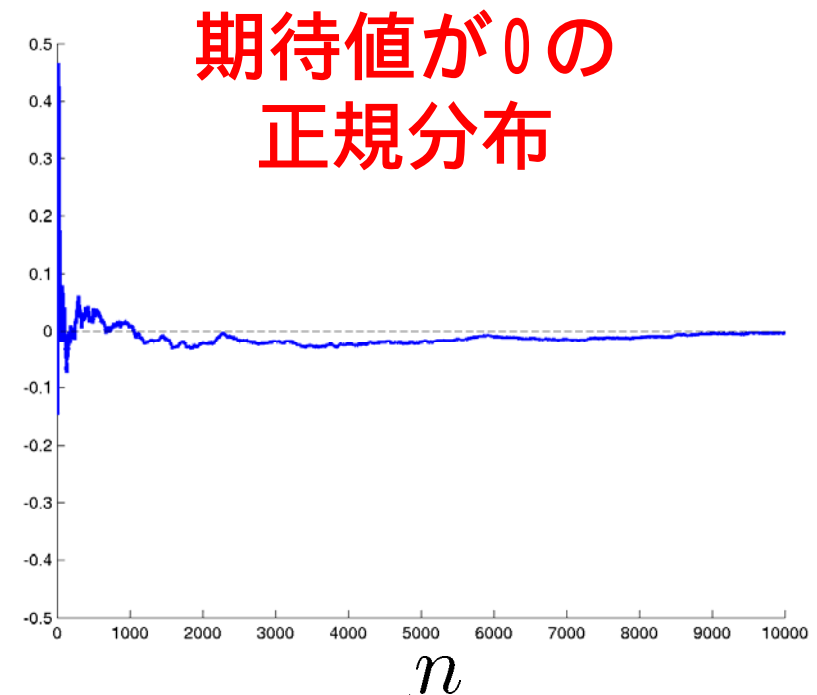
■ 標本平均の変化

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



標本平均は収束しない

➡ 平均は存在しない



標本平均は0に収束

追加宿題

141

1. **ガンマ分布** $Ga(\alpha, \lambda)$ の積率母関数, 期待値, 分散がそれぞれ次式で与えられることを示せ

$$M_X(t) = \lambda^\alpha (\lambda - t)^{-\alpha}$$

$$E(X) = \alpha/\lambda$$

$$V(X) = \alpha/\lambda^2$$

ヒント: $E(X) = M'_X(0)$, $V(X) = M''_X(0) - M'_X(0)^2$

2. **ベータ分布** $Be(\alpha, \beta)$ の分散が次式で与えられることを示せ

$$V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

ヒント: $E(X^2)$ を求め, $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ を使う