確率と統計(0)
「確率変数と確率分布(第5章)」

- 担当教員： 杉山 将 (計算工学専攻)
- 居室： W8E-505
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp
- 授業のウェブサイト：

  http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/

確率

- 確率：事象の起こりやすさを定量的に示すもの
- 事象Aの起こる確率を次式で表す

$$P(A)$$

- 高校で習う確率は，例えばさいころの出た目を数え上げるなど，計算するものであった．
- 大学以降で習う確率は，数学的に定義するもの．

確率の公理

- **コルモゴロフ(Kolmogorov) の公理**
  1. **任意の事象 A_i に対して**

$$0 \leq P(A_i) \leq 1$$

  2. **全確率は1：**

$$P(\Omega) = 1$$

  3. **互いに排反な事象 A_i に対して**

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

- **以後, 全ての確率計算は上記の3つの公理のみに基づいて行なわれる.**

確率変数と確率分布

- **確率変数**(random variable)：とる値に対して確率が与えられている変数
- 実現値：確率変数が実際にとる値
- **確率分布**(probability distribution)：確率変数の実現値と確率との関係を関数として表現したもの

- 確率変数は大文字で，実現値は小文字で表わすことが多い

離散型の確率変数と確率関数

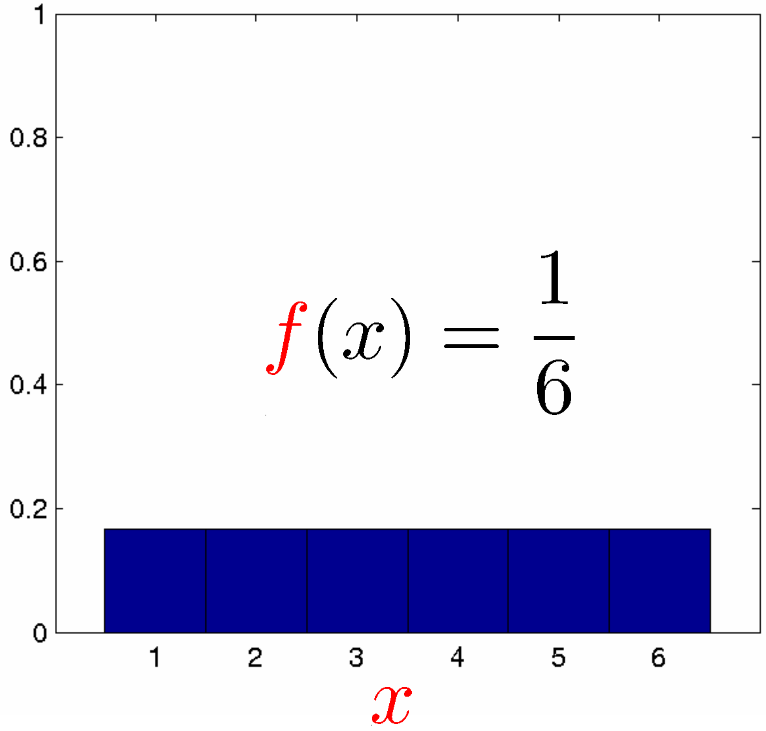
- **離散型**(discrete type)**確率変数**：**可算集合の中の値をとる確率変数**
- **離散型の確率変数の確率分布：確率変数がそれぞれの値をとる確率**

$$P(X = x) = f(x)$$

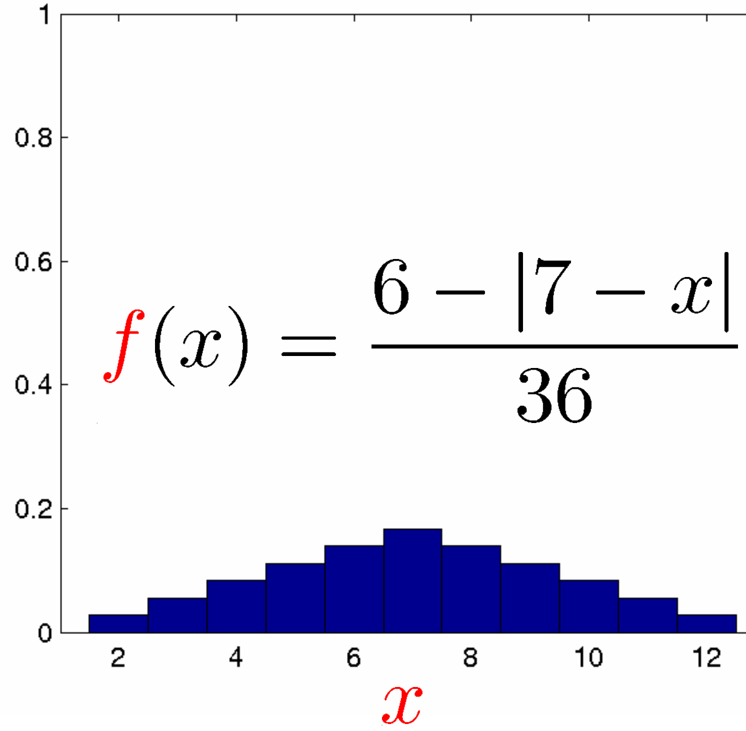
$f(x)$:**確率関数**(probability function)

$$f(x) \geq 0, \qquad \sum_x f(x) = 1$$

離散型の確率分布の例



さいころの出る目



二つのさいころの
出る目の和

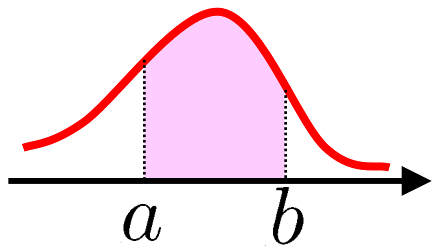
主な離散型の確率分布

- 一様分布
- 超幾何分布
- 二項分布
- ポアソン分布
- 負の二項分布
- 幾何分布

連続型の確率変数と確率密度関数

- **連続型**(continuous type)**確率変数**：連続値をとる確率変数
- 連続型の確率変数の確率分布：確率変数が a 以上 b 以下の値をとる確率

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



$f(x)$:**確率密度関数**(probability density function)

$$f(x) \geq 0, \quad \int f(x)dx = 1$$

- **注意**：連続型の確率変数がある値 a をとる確率はゼロ！

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

累積分布関数

- 連続型の確率変数が x 以下の値をとる確率

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$F(x)$:**累積分布関数**(cumulative distribution function)

$$F'(x) = f(x)$$

- 広義単調増加:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2)$$

- 範囲:

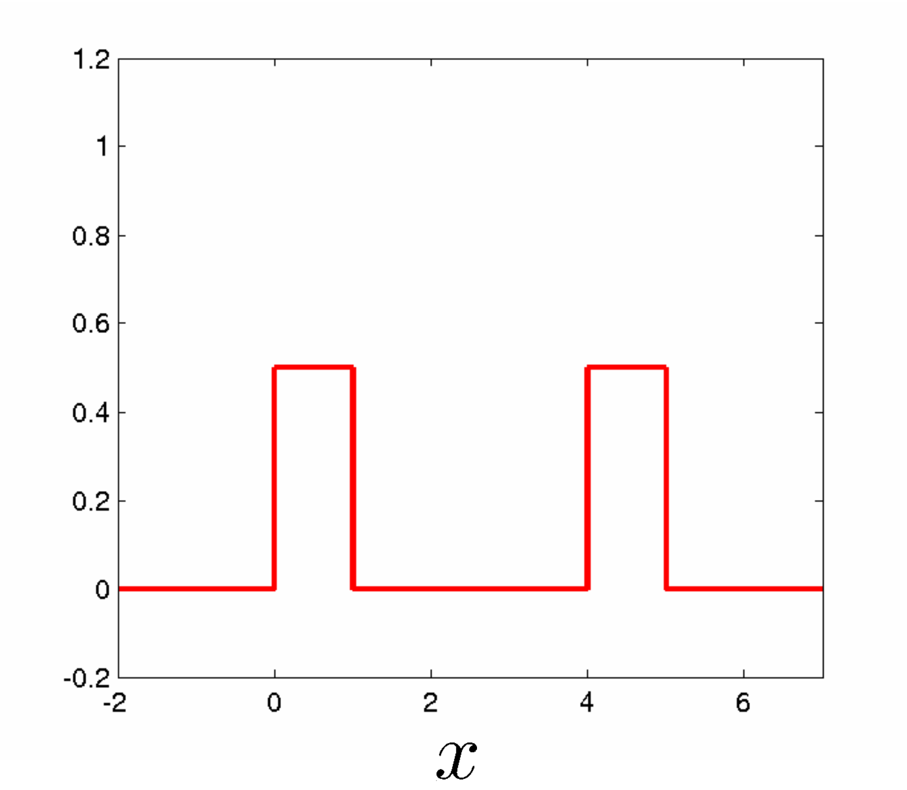
$$x \to -\infty \quad \Longrightarrow \quad F(x) \to 0$$

$$x \to \infty \quad \Longrightarrow \quad F(x) \to 1$$

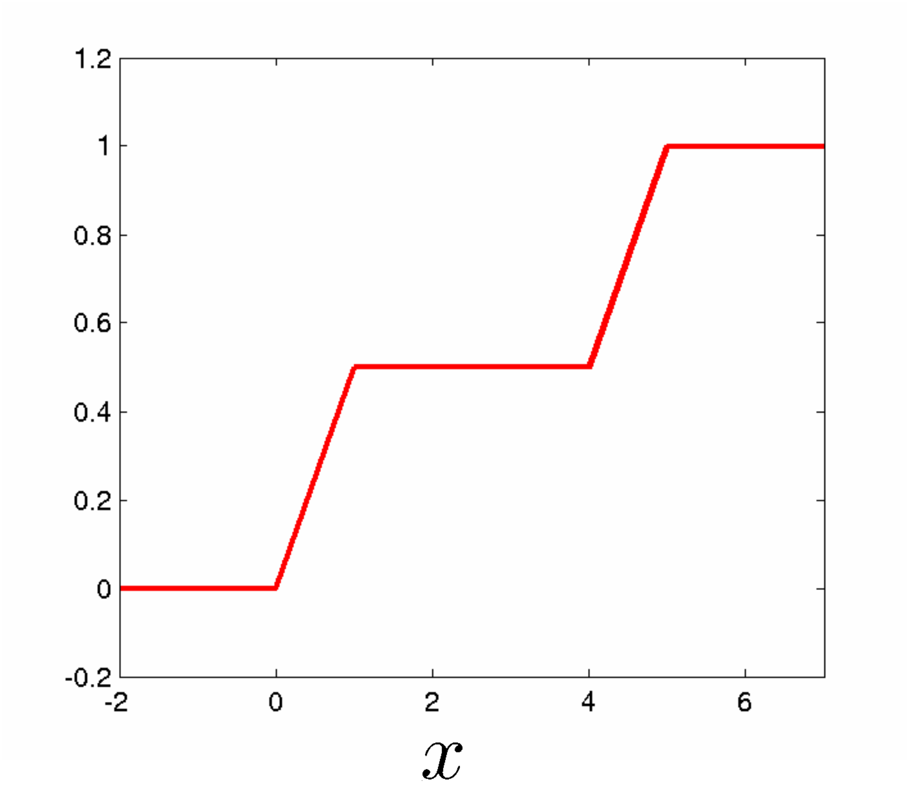
- 右連続:

$$\epsilon \to +0 \quad \Longrightarrow \quad F(x+\epsilon) \to F(x) \text{ for any } x$$

確率密度関数と累積分布関数の例



確率密度関数



累積分布関数

主な連続型の確率分布

- 一様分布
- 正規分布
- 指数分布
- カイ二乗分布
- ガンマ分布
- ベータ分布
- コーシー分布
- t分布

確率変数の性質を表わす指標

- **期待値**(expectation)：確率変数の値の平均 (正確には確率による重み付きの平均)
- 確率変数 X の期待値を $E(X)$ で表す
  - 離散型：
$$E(X) = \sum_x x f(x)$$
  - 連続型：
$$E(X) = \int x f(x) dx$$

期待値作用素の表記について

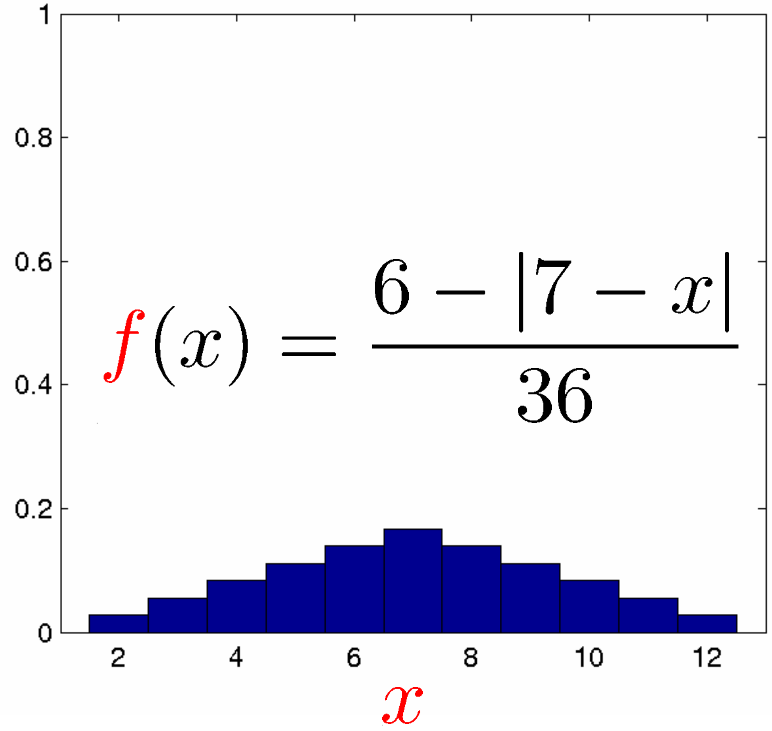
- $E(\cdot)$は確率変数 X に関する期待値を表す．即ち

$$E(\cdot) = \int \cdot f(x)dx$$

- 正確には，$E(\cdot)$ を $E_X(\cdot)$ と表記すべきであるが，簡単のため省略している．
- 以後，説明を簡単にするため，連続型の確率変数を主に扱うことにする．離散型を考える場合は，積分を和に変更すればよい．

例

- 二つのさいころの目の和の期待値を求めよ



二つのさいころの出る目の和

$$E(X) = \sum_{x=2}^{12} x f(x) = 7$$

期待値演算の性質

- 定数は期待値をとっても値は変わらない

$$E(c) = c$$

- 定数を足した期待値は，期待値に定数を足したものと等しい

$$E(X + c) = E(X) + c$$

- 定数倍の期待値は，期待値の定数倍と等しい

$$E(cX) = cE(X)$$

期待値演算は線形

- 証明は演習！

演習の解答

- $E(c) = \int cf(x)dx = c\int f(x)dx = c$
- $E(X+c) = \int (x+c)f(x)dx$

$$= \int xf(x)dx + c\int f(x)dx$$

$$= E(X) + c$$

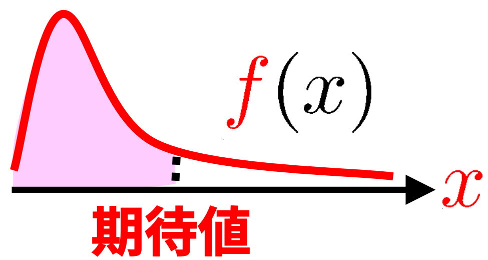
- $E(cX) = \int cxf(x)dx$

$$= c\int xf(x)dx = cE(X)$$

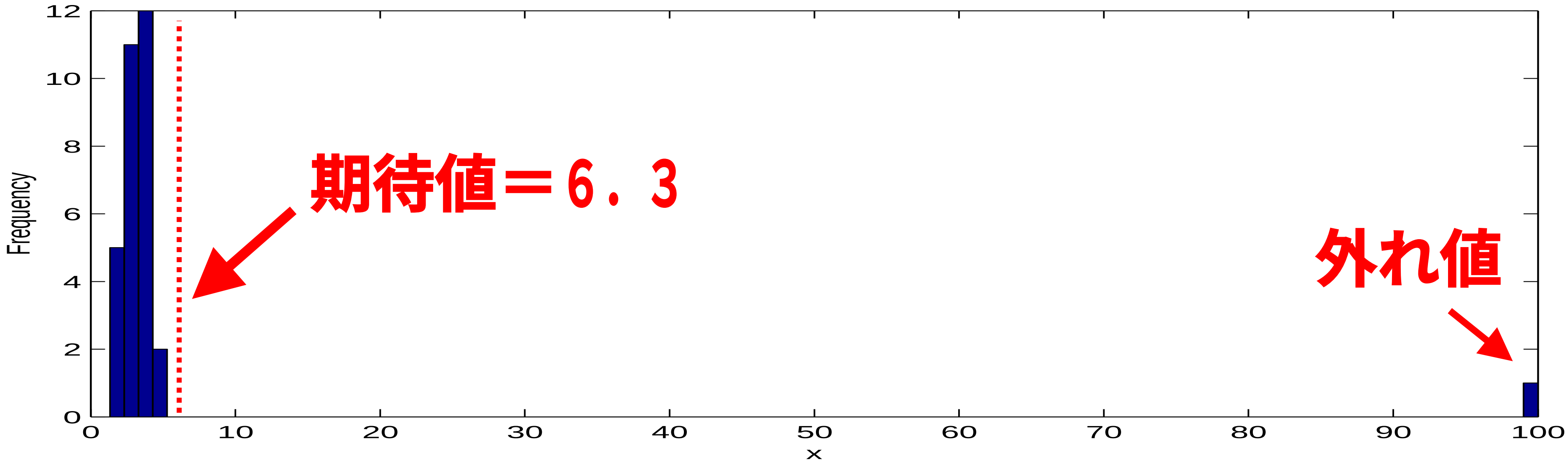
期待値の問題点

- 期待値は, 外れ値 (outlier) があるときに直感と合わない値になることがある.

$$E(X) = \int x f(x) dx$$



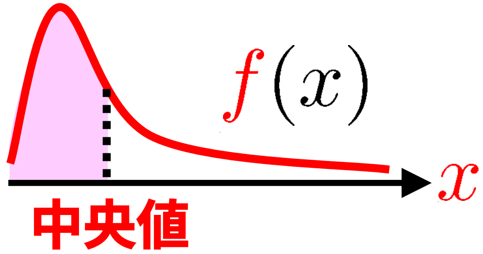
- 例 : 収入分布. 一人大金持ち (外れ値) がいると, その人以外全員が期待値以下になってしまう.



その他のよく用いる指標

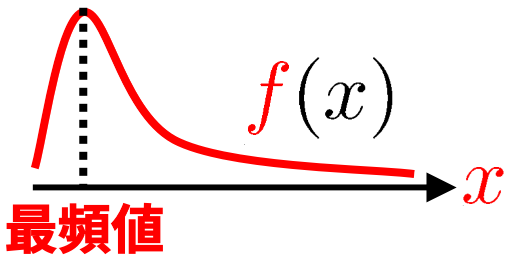
- **中央値**(median)：

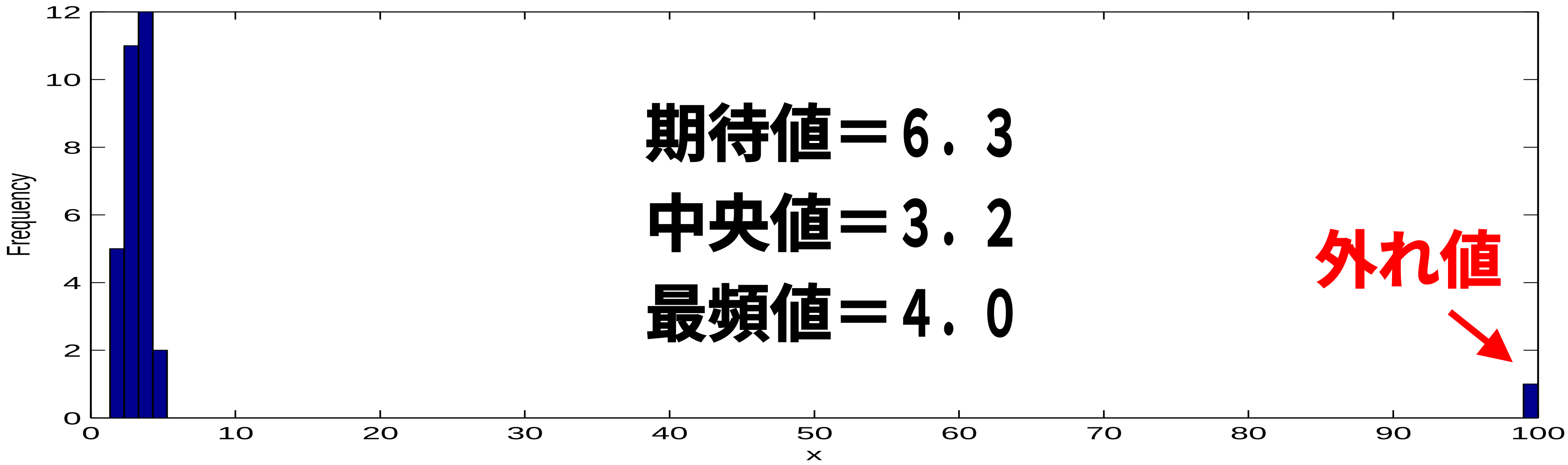
$$P(X \leq x) = \frac{1}{2} \text{ となる } x$$



- **最頻値**(mode)：

$$f(x) \text{ を最大にする } x$$





小レポート

$-\infty < a < b < \infty$

1. $[a,b]$ 上に定義された確率密度関数 $f(x)$ を考える.

A) 次の二乗誤差 $J_1(y)$ を最小にする y を y_1 で表す:

$$y_1 = \underset{y}{\mathrm{argmin}}\, J_1(y) \qquad J_1(y) = \int_a^b (x-y)^2 f(x)dx$$

このとき, y_1 は X の期待値 (つまり, $y_1 = E[X]$) であることを示せ.

B) 次の絶対誤差 $J_2(y)$ を最小にする y を y_2 で表す:

$$y_2 = \underset{y}{\mathrm{argmin}}\, J_2(y) \qquad J_2(y) = \int_a^b |x-y| f(x)dx$$

このとき, y_2 は X の中央値 (つまり, $F(y_2) = 1/2$) であることを示せ.

$\underset{y}{\mathrm{argmin}}\, J(y)$ は $J(y)$ を最小にする y

小レポート (続き)

2. 3つのさいころの出る目の和 X の確率関数 $f(x)$，および期待値 $E[X]$ を求めよ．