平成１９年度　解析学（電気電子）（E・O）講義資料
「連立微分方程式」

2006.7.19

連立微分方程式とは、例えば以下のように複数の変数についての方程式を指す。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} = x - y & (1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}} = 2x + 4y & (2) \end{cases}$$

［１］２階線形微分方程式への変形による解法

式(1)より y を求めると、

$$y = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} + x \qquad (3)$$

式(3)をｔについて微分して、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{dt}^2} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} \qquad (4)$$

式(3), (4)を(2)に代入して、

$$-\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{dt}^2} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} = 2x + 4\left(-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} + x\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} + 6x = 0$$

特性方程式は

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$
$$\lambda = 2,\ \ 3$$

よって、$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$

式(3)に代入して、

$$y = -(2c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{3t}) + (c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}) = -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{3t}$$

［２］線形代数（行列の解析手法）を活用した解法
参考文献:『なっとくする微分方程式』小寺平治著　講談社

定係数連立１次微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{X}(t)=\mathbf{AX}(t)$$

の解は以下で与えられる。

① A が対角化可能で、その固有値 λ_1, λ_2 が実数（$\lambda_1 \neq \lambda_2$）の場合

$\boldsymbol{c}$ を任意定数行列とし、また行列 A が行列 P を用いて $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{J}$ により対角化が可能であり、固有値 λ_1, λ_2（$\lambda_1 \neq \lambda_2$）それぞれの固有ベクトルを $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$ としたとき、$\mathbf{P}=(\mathbf{X_1}\quad \mathbf{X_2})$ とおくことによって $\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ と対角化できるので、

$$\mathbf{X}(t)=\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}=\mathrm{e}^{\mathbf{P}(t\mathbf{J})\mathbf{P}^{-1}}\mathbf{c}=\mathbf{P}\mathrm{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}=\left(\mathbf{X_1}\quad \mathbf{X_2}\right)\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

$$=c_1\mathbf{X_1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_2\mathbf{X_2}\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

ただし、$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ とおいた。

② A が対角化可能でない場合（固有値 λ_1, λ_2 が実数で重根（$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$）の場合）
　A の固有値がλであり、対角化が可能でない場合、λに対する固有空間から $\boldsymbol{X}_1$ をとり、$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{X_2}=\mathbf{X_1}$ となる $\mathbf{X_2}$ を選ぶと、A は基底 $\mathbf{P}=\left(\mathbf{X_1}\quad \mathbf{X_2}\right)$ によりジョルダンの標準形 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ に変換される。
　このとき、解は以下の式で与えられる。

$$\mathbf{X}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c} = e^{\mathbf{P}(t\mathbf{J})\mathbf{P}^{-1}}\mathbf{c} = \mathbf{P}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c} = (\mathbf{X_1} \quad \mathbf{X_2})\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda t}\mathbf{X_1} + c_2 e^{\lambda t}(t\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2})$$

③　A が対角化可能で、その固有値 λ_1，λ_2 が虚数（$\lambda_1 \neq \lambda_2$）の場合

　A の固有値が複素数 λ，$\overline{\lambda}$ のとき、$\lambda = \alpha + j\beta$ に対する固有ベクトルを $\mathbf{X} = \mathbf{V_1} + j\mathbf{V_2}$ とすると、$\lambda = \alpha - j\beta$ に対する固有ベクトルは $\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{V_1} - j\mathbf{V_2}$ となるので、解は以下の式で与えられる。

$$\mathbf{X}(t) = c_1(\mathbf{V_1} + j\mathbf{V_2})e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2(\mathbf{V_1} - j\mathbf{V_2})e^{(\alpha - j\beta)t}$$

$$= \left[\{(c_1 + c_2)\mathbf{V_1} + j(c_1 - c_2)\mathbf{V_2}\}\cos\beta t + \{j(c_1 - c_2)\mathbf{V_1} - (c_1 + c_2)\mathbf{V_2}\}\sin\beta t\right]e^{\alpha t}$$

$$= \left[(C_1\mathbf{V_1} + C_2\mathbf{V_2})\cos\beta t + (C_2\mathbf{V_1} - C_1\mathbf{V_2})\sin\beta t\right]e^{\alpha t}$$

　ただし $C_1 = c_1 + c_2$，$C_2 = j(c_1 - c_2)$ とおいた。

④ $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathbf{X}(t)}{\mathrm{dt}} = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{b}(t)$

この一般解は以下の通りである。

$$\mathbf{X}(t) = e^{t\mathbf{A}}\left(\int e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{b}(t)dt + \mathbf{c}\right)$$

[問題例]

①

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{dt}} = x - y \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{dt}} = 2x + 4y \end{cases}$$

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$とおくと、微分方程式は以下のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{X}}{\mathrm{dt}} = \mathbf{AX}$$

この一般解は以下の通りである。

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}$$

行列 A を対角化する。

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda) - (-1)\cdot 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\therefore \lambda = 2,\ \ 3$$

次に各固有値に対する固有ベクトルを求める。

$\lambda = 2$の場合、

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

$y_1 + y_2 = 0$より、

固有ベクトル$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$の場合、

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -1 \\ 2 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$$

$2y_1+y_2=0$より、

固有ベクトル$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

よって、正則行列$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$を用いて、行列$\mathbf{A}$は$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$で対角化でき、$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$となる。

$\mathbf{J}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$とおくと、

$$\mathbf{X}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}=e^{\mathbf{P}(t\mathbf{J})\mathbf{P}^{-1}}=\mathbf{P}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ただし$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$とおいた。

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & -2e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1e^{2t}+c_2e^{3t} \\ -c_1e^{2t}-2c_2e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases} x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{3t} \\ y(t)=-c_1e^{2t}-2c_2e^{3t} \end{cases}$$

②

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{dt}}=2x-8y \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{dt}}=2x-6y \end{cases}$$

$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ \ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$とおき、行列$\mathbf{A}$の固有値を求める。

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -8 \\ 2 & -6-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(-6-\lambda)-(-8)\cdot 2=\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$$

より、

$\lambda = -2$ （重根）
よって、ジョルダン標準形に変形する。

$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ とおき、$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ となる変換行列 $\mathbf{P}$ を求める。
$\mathbf{P} = (\mathbf{p} \quad \mathbf{q})$ とおくと、$\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$ より、

$$\begin{cases} \mathbf{Ap} = -2\mathbf{p} \\ \mathbf{Aq} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q} \end{cases}$$

すなわち、$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2p_1 - 8p_2 = -2p_1 & (1) \\ 2p_1 - 6p_2 = -2p_2 & (2) \\ 2q_1 - 8q_2 = p_1 - 2q_1 & (3) \\ 2q_1 - 6q_2 = p_2 - 2q_2 & (4) \end{cases}$$

式(1)(2)より

$$p_2 = \frac{1}{2}p_1$$

よって、例えば $p_1 = 4, \quad p_2 = 2$
(3),(4)に代入して、

$$\begin{cases} 4q_1 - 8q_2 = 4 \\ 2q_1 - 4q_2 = 2 \end{cases}$$

変形して、
$q_1 - 2q_2 = 1$
よって、例えば $q_1 = 3, \quad q_2 = 1$

$$\therefore \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\mathbf{X} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c} = e^{\mathbf{P}(t\mathbf{J})\mathbf{P}^{-1}}\mathbf{c} = \mathbf{P}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}$$

ここで、$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ とおいて、

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 4 & 4t+3 \\ 2 & 2t+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x(t) = (4c_1 + (4t+3)c_2)e^{-2t} \\ y(t) = (2c_1 + (2t+1)c_2)e^{-2t} \end{cases}$$

③

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{dt}} = x - y \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{dt}} = x + y \end{cases}$$

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおき、行列 A の固有値を求める。

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - (-1)\cdot 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

より、

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 2}}{2} = 1 \pm j$$

次に各固有値に対する固有ベクトルを求める。

$\lambda = 1 + j$ の場合、

$$\left(\mathbf{A}-(1+j)\mathbf{I}\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} -j & -1 \\ 1 & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$$

$y_2=-jy_1$より、

固有ベクトル$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$

$\lambda=1-j$の場合、

$$\left(\mathbf{A}-(1-j)\mathbf{I}\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} j & -1 \\ 1 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$$

$y_2=jy_1$より、

固有ベクトル$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$

よって、行列$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix}$を用いて、行列$\mathbf{A}$は$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$で対角化でき、

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix}=\frac{1}{2j}\begin{pmatrix} j & -1 \\ j & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2j}\begin{pmatrix} -1+j & -1-j \\ 1+j & 1-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2j}\begin{pmatrix} (-1+j)-j(-1-j) & (-1+j)+j(-1-j) \\ (1+j)-j(1-j) & (1+j)+j(1-j) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2j}\begin{pmatrix} -2+2j & 0 \\ 0 & 2+2j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{pmatrix}$$

となる。

$$\mathbf{X}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}=e^{\mathbf{P}(t\mathbf{J})\mathbf{P}^{-1}}=\mathbf{P}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(1+j)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-j)t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ただし$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$とおいた。

$$x=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-j&j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{(1+j)t}&0\\0&e^{(1-j)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{(1+j)t}&e^{(1-j)t}\\-je^{(1+j)t}&je^{(1-j)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\left(c_1e^{jt}+c_2e^{-jt}\right)e^t\\\left(-jc_1e^{jt}+jc_2e^{-jt}\right)e^t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\{(c_1+c_2)\cos t+j(c_1-c_2)\sin t\}e^t\\\left[(-jc_1+jc_2)\cos t+j\{-jc_1-jc_2\}\sin t\right]e^t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\{(c_1+c_2)\cos t+j(c_1-c_2)\sin t\}e^t\\\left[-j(c_1-c_2)\cos t+(c_1+c_2)\sin t\right]e^t\end{pmatrix}$$

$C_1=c_1+c_2$，$C_2=j(c_1-c_2)$とおいて、

与式＝$\begin{pmatrix}(C_1\cos t+C_2\sin t)e^t\\\left[-C_2\cos t+C_1\sin t\right]e^t\end{pmatrix}$

$$\therefore\begin{cases}x(t)=(C_1\cos t+C_2\sin t)e^t\\y(t)=\left[-C_2\cos t+C_1\sin t\right]e^t\end{cases}$$

④

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}}=x-y+2e^t\\\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}=2x+4y-2e^t\end{cases}$$

$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}(t)=\begin{pmatrix}2e^t\\-2e^t\end{pmatrix}$とおくと、微分方程式は以下のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{dt}}=\mathbf{AX}+\mathbf{b}(t)$$

この一般解は以下の通りである。

$$\mathbf{X}=e^{t\mathbf{A}}\left(\int e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{b}(t)\,\mathrm{dt}+\mathbf{c}\right)$$

①　　で求めたように、行列 $\mathbf{A}$ の固有値は 2 および 3 であり、各固有値に対する固有ベクトルは$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$である。

従って、正則行列 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-2\end{pmatrix}$を用いて、行列 $\mathbf{A}$ は $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ で対角化でき、$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$となる。

$\mathbf{J}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ とおくと、

$$e^{t\mathbf{A}}=e^{\mathbf{P}(t\mathbf{J})\mathbf{P}^{-1}}=\mathbf{P}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t} & e^{3t}\\ -e^{2t} & -2e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}-e^{3t}\\ -2e^{2t}+2e^{3t} & -e^{2t}+2e^{3t}\end{pmatrix}$$

また、

$$e^{-t\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}2e^{-2t}-e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t}\\ -2e^{-2t}+2e^{-3t} & -e^{-2t}+2e^{-3t}\end{pmatrix}$$

よって、

$$\int e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{b}(t)\,\mathrm{dt}=\int\begin{pmatrix}2e^{-2t}-e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t}\\ -2e^{-2t}+2e^{-3t} & -e^{-2t}+2e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2e^{t}\\ -2e^{t}\end{pmatrix}dt=\int\begin{pmatrix}2e^{-t}\\ -2e^{-t}\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}-2e^{-t}\\ 2e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{t\mathbf{A}}\left(\int e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{b}(t)\,\mathrm{dt}+\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}-e^{3t}\\ -2e^{2t}+2e^{3t} & -e^{2t}+2e^{3t}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-2e^{-t}\\ 2e^{-t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}-2e^{t}+c_1(2e^{2t}-e^{3t})+c_2(e^{2t}-e^{3t})\\ 2e^{t}+c_1(-2e^{2t}+2e^{3t})+c_2(-e^{2t}+2e^{3t})\end{pmatrix}$$

すなわち、

$$\begin{cases}x(t)=-2e^{t}+(2c_1+c_2)e^{2t}+(-c_1-c_2)e^{3t}\\ y(t)=2e^{t}+(-2c_1-c_2)e^{2t}+(2c_1+2c_2)e^{3t}\end{cases}$$

●備考：[指数行列]

行列 $\mathbf{A}$ に対して、指数行列 $e^{\mathbf{A}}$ を以下で定義する。

$$e^{\mathbf{A}}=\mathbf{I}+\frac{1}{1!}\mathbf{A}+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3+\ldots+\frac{1}{n!}\mathbf{A}^n+\ldots$$

この定義から、

(1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$に対して、

$$e^{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{1!}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}^2+\frac{1}{3!}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}^3+\ldots+\frac{1}{n!}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}^n+\ldots$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{1!}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix}+\frac{1}{3!}\begin{pmatrix}\alpha^3 & 0\\ 0 & \beta^3\end{pmatrix}+\ldots+\frac{1}{n!}\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}+\ldots$$

$$=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{1!}\alpha+\frac{1}{2!}\alpha^2+\frac{1}{3!}\alpha^3+\ldots & 0\\ 0 & 1+\frac{1}{1!}\beta+\frac{1}{2!}\beta^2+\frac{1}{3!}\beta^3+\ldots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{\alpha} & 0\\ 0 & e^{\beta}\end{pmatrix}$$

(2) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$に対して、

$$e^{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{1!}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2+\frac{1}{3!}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^3+\ldots+\frac{1}{n!}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^n+\ldots$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{1!}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{3!}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\ldots+\frac{1}{n!}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\ldots=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(3) $\mathbf{C}=t\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$に対して、

$$e^{\mathbf{C}}=e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}=e^{t\mathbf{A}}\cdot e^{t\mathbf{B}}=\begin{pmatrix}e^{\alpha t} & 0\\ 0 & e^{\beta t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\alpha t} & te^{\alpha t}\\ 0 & e^{\beta t}\end{pmatrix}$$

その他、定義から導かれる主な性質を以下に示す。

● $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{t\mathbf{A}}=\mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}$

● $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=e^{\mathbf{A}}\cdot e^{\mathbf{B}}$

● $(e^{\mathbf{A}})^{-1}=e^{-\mathbf{A}}$

● $e^{\mathbf{PAP}^{-1}}=\mathbf{P}e^{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1}$