

第12回 2階斉次線形微分方程式:級数による解法 ベッセル関数 偏微分方程式

7月12日(木)

【学習範囲】 『理工系のための解く！微分方程式』第5章5.1～5.2 (pp.61～69)
第7章7.1～7.4 (pp.87～99)

詳細は本を参照のこと。

● 2階斉次線形微分方程式:級数による解法

2階斉次線形微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ の解を $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

とおき、もとの微分方程式に代入して

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)a_{i+2}x^i + P(x) \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)a_{i+1}x^i + Q(x) \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0$$

x の各べき係数が0となることから、漸化式を求め、解を得る。

● ベッセルの微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\nu \geq 0)$$

● 偏微分方程式

① 拡散方程式 (放物形偏微分方程式)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}$$

解法

変数 x のみの関数 $X(x)$ と t のみの関数 $T(t)$ の積を解と仮定して変数分離解を求める。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t) \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = X(x) \frac{dT}{dt} \quad \text{より、}$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{DT(t)} \frac{dT}{dt}$$



左辺は x のみ、右辺は t のみなので
任意の x, t に対して成立するためには
定数 $(-\alpha^2)$ でなければならない。

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad X = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

$$\frac{1}{DT(t)} \frac{dT}{dt} = -\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad T = C \exp(-\alpha^2 Dt)$$

(1) 定数が離散的に求まる場合

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos \alpha_n x + B_n \sin \alpha_n x] \exp(-\alpha_n^2 Dt)$$

(2) 定数が連続的に求まる場合

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] \exp(-\alpha^2 Dt) d\alpha$$

② 波動方程式 (双曲形偏微分方程式)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

解法 ①と同様、変数分離解を仮定して解く。

$v(x, t) = X(x)T(t)$ において、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = T(t) \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = X(x) \frac{d^2 T}{dt^2} \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{左辺は } x \text{ のみ、右辺は } t \text{ のみなので} \\ \text{任意の } x, t \text{ に対して成立するためには} \\ \text{定数 } (-\beta^2) \text{ でなければならない。} \end{array}$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\beta^2 \quad \Rightarrow \quad X = A \cos \beta x + B \sin \beta x$$

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\beta^2 \quad \Rightarrow \quad T = C \cos \beta c t + D \sin \beta c t$$

(1) 定数が離散的に求まる場合

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos \beta_n x + B_n \sin \beta_n x] [C_n \cos \beta_n ct + D_n \sin \beta_n ct]$$

(2) 定数が連続的に求まる場合

$$v(x, t) = \int_0^{\infty} [A(\beta) \cos \beta x + B(\beta) \sin \beta x] [C(\beta) \cos \beta cx + D(\beta) \sin \beta cx] d\beta$$

学習範囲の内容をしっかりと身につけるため、本の問題を解いてみよう。