平成１９年度　解析学（電気電子）（O）講義資料
「２階非斉次線形微分方程式の解法（RLC 回路編）」

2006.7.5

（RLC 回路）

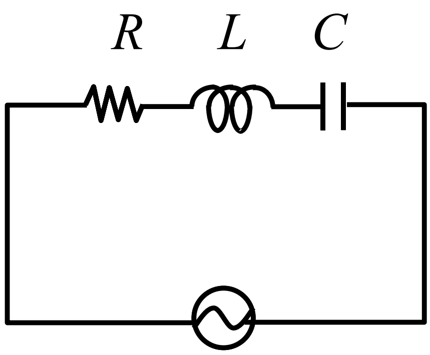

図１　RLC 回路

図１に示す LC 回路の電源電圧が① $\boldsymbol{v(t) = v_0 e^{j\omega t}}$　② $\boldsymbol{v(t) = v_0 \cos\omega t}$ で変化するとき、回路を流れる電流 $\boldsymbol{i(t)}$ を求めてみよう。

（１）[$\boldsymbol{v(t) = v_0 e^{j\omega t}}$ を用いた場合の解法（交流回路の定常解）

$$i(t) = \frac{v_0 e^{j\omega t}}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{\omega v_0}{L} \cdot \frac{e^{j\omega t}}{\dfrac{R}{L}\omega + j\left(\omega^2 - \dfrac{1}{CL}\right)}$$

ここで $\tau = \dfrac{2\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{R}}$，$\omega_0{}^2 = \dfrac{1}{\boldsymbol{LC}}$ とおくと、

$$与式 = \frac{\omega v_0}{L} \cdot \frac{e^{j\omega t}}{\dfrac{2\omega}{\tau} + j\left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)}$$

$$= \frac{\omega v_0}{L} \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{2\omega}{\tau}\right)^2 + \left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)^2}} \left(\frac{\dfrac{2\omega}{\tau}}{\sqrt{\left(\dfrac{2\omega}{\tau}\right)^2 + \left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)^2}} - j \frac{\omega^2 - \omega_0{}^2}{\sqrt{\left(\dfrac{2\omega}{\tau}\right)^2 + \left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)^2}} \right) e^{j\omega t}$$

$$= \frac{\omega v_0}{L} \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{2\omega}{\tau}\right)^2 + \left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)^2}} e^{j(\omega t - \phi)}$$

ただし、$\tan\phi = \dfrac{\omega^2 - \omega_0{}^2}{\dfrac{2\omega}{\tau}}$

（２）微分方程式による解法

定数変化法を用いて解を求める。

まず回路を流れる電流 $\boldsymbol{i(t)}$ と $\boldsymbol{v(t)}$ の関係は以下の通り。

$$\boldsymbol{v = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt}$$

両辺をｔについて微分する。

$$\boldsymbol{\frac{dv}{dt} = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C}i}$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\frac{dv}{dt}} \qquad (1)$$

ここで $\tau = \frac{2L}{R}$, $\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}$ とおくと、式(1)は以下のようになる。

$$\boldsymbol{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{di}{dt} + \omega_0{}^2 i = \frac{1}{L}\frac{dv}{dt}} \qquad (2)$$

この２階非斉次線形微分方程式を解くことになる。

式(2)の右辺を０とおいて２階斉次線形微分方程式

$$\boldsymbol{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{di}{dt} + \omega_0{}^2 i = 0} \qquad (3)$$

の１次独立の基本解 $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$ を求める。

L, C, R が時間に対して定数であると仮定すると、式(3)は定係数微分方程式なので、特性方程式は

$$\lambda^2 + \frac{2}{\tau}\lambda + \omega_0{}^2 = 0$$

である。

$$\lambda = \frac{-\frac{2}{\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{\tau}\right)^2 - 4\omega_0{}^2}}{2} = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0{}^2} = -\frac{1}{\tau} \pm \boldsymbol{j}\sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{1}{\tau^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm \boldsymbol{j}\omega'$$

ただし $\omega_0 > \frac{1}{\tau}$ の条件を仮定し、$\omega' = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{1}{\tau^2}}$ とおいた。

① $v(t) = v_0 \cos \omega t$ の場合

$$y_1 = e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega' t,\ \ y_2 = e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega' t$$ とおける。

次にロンスキャン（Wronskian）を求めると、

$$R(t) = \frac{1}{L}\frac{dv}{dt} = -\frac{\omega v_0}{L} \sin \omega t$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega' t - \omega' e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega' t = -e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{\tau} \cos \omega' t + \omega' \sin \omega' t \right)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega' t + \omega' e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega' t = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{\tau} \sin \omega' t + \omega' \cos \omega' t \right)$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dt} & \frac{dy_2}{dt} \end{vmatrix} = y_1 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dy_1}{dt}$$

$$= e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega' t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{\tau} \sin \omega' t + \omega' \cos \omega' t \right) + e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega' t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{\tau} \cos \omega' t + \omega' \sin \omega' t \right)$$

$$= e^{-\frac{2t}{\tau}} \left[\cos \omega' t \cdot \left(-\frac{1}{\tau} \sin \omega' t + \omega' \cos \omega' t \right) + \sin \omega' t \cdot \left(\frac{1}{\tau} \cos \omega' t + \omega' \sin \omega' t \right) \right]$$

$$= \omega' e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

$$-\int \frac{R(t) y_2}{W} dt = -\int \frac{-\frac{\omega v_0}{L} \sin \omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega' t}{\omega' e^{-\frac{2}{\tau}t}} dt = \frac{\omega v_0}{\omega' L} \int e^{\frac{t}{\tau}} \sin \omega t \sin \omega' t dt$$

$$= -\frac{\omega v_0}{2\omega' L} \int \left[e^{\frac{t}{\tau}} \{ \cos(\omega + \omega')t - \cos(\omega - \omega')t \} \right] dt$$

$$\int e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega + \omega') t dt = \tau e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega + \omega') t + \int \tau e^{\frac{t}{\tau}} (\omega + \omega') \sin(\omega + \omega') t dt$$

$$= \tau e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega + \omega') t + \tau(\omega + \omega') \left[\tau e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega + \omega') t - \int \tau e^{\frac{t}{\tau}} (\omega + \omega') \cos(\omega + \omega') t dt \right]$$

$$= \tau e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega + \omega') t + \tau^2 (\omega + \omega') e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega + \omega') t - \tau^2 (\omega + \omega')^2 \int e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega + \omega') t dt$$

$$\therefore \int e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega + \omega')t dt = \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega+\omega')^2}\left[\cos(\omega+\omega')t + \tau(\omega+\omega')\sin(\omega+\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}$$

また

$$\int e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega - \omega')t dt = \tau e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega-\omega')t + \int \tau e^{\frac{t}{\tau}} (\omega-\omega')\sin(\omega-\omega')t dt$$

$$= \tau e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega-\omega')t + \tau(\omega-\omega')\left[\tau e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega-\omega')t - \int \tau e^{\frac{t}{\tau}}(\omega-\omega')\cos(\omega-\omega')t dt\right]$$

$$= \tau e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega-\omega')t + \tau^2(\omega-\omega')e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega-\omega')t - \tau^2(\omega-\omega')^2 \int e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega-\omega')t dt$$

$$\therefore \int e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega - \omega')t dt = \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega-\omega')^2}\left[\cos(\omega-\omega')t + \tau(\omega-\omega')\sin(\omega-\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$\therefore -\int \frac{R(t)y_2}{W} dt = -\frac{\omega v_0}{2\omega' L}\left[\frac{\tau}{1+\tau^2(\omega+\omega')^2}\left[\cos(\omega+\omega')t + \tau(\omega+\omega')\sin(\omega+\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}\right.$$

$$\left. - \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega-\omega')^2}\left[\cos(\omega-\omega')t + \tau(\omega-\omega')\sin(\omega-\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}\right]$$

$$\int \frac{R(t)y_1}{W} dt = \int \frac{-\frac{\omega v_0}{L}\sin\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\omega' t}{\omega' e^{-\frac{2}{\tau}t}} dt = -\frac{\omega v_0}{\omega' L}\int e^{\frac{t}{\tau}} \sin\omega t \cos\omega' t dt$$

$$= -\frac{\omega v_0}{2\omega' L}\int\left[e^{\frac{t}{\tau}}\left\{\sin(\omega+\omega')t + \sin(\omega-\omega')t\right\}\right]dt$$

$$\int e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega + \omega')t dt = \tau e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega+\omega')t - \int \tau e^{\frac{t}{\tau}} (\omega+\omega')\cos(\omega+\omega')t dt$$

$$= \tau e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega+\omega')t - \tau(\omega+\omega')\left[\tau e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega+\omega')t + \int \tau e^{\frac{t}{\tau}}(\omega+\omega')\sin(\omega+\omega')t dt\right]$$

$$= \tau e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega+\omega')t - \tau^2(\omega+\omega')e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega+\omega')t - \tau^2(\omega+\omega')^2 \int e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega+\omega')t dt$$

$$\therefore \int e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega+\omega')t\,dt = \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega+\omega')^2}\left[\sin(\omega+\omega')t - \tau(\omega+\omega')\cos(\omega+\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$\int e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega-\omega')t\,dt = \tau e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega-\omega')t - \int \tau e^{\frac{t}{\tau}}(\omega-\omega')\cos(\omega-\omega')t\,dt$$

$$= \tau e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega-\omega')t - \tau(\omega-\omega')\left[\tau e^{\frac{t}{\tau}}\cos(\omega-\omega')t + \int \tau e^{\frac{t}{\tau}}(\omega-\omega')\sin(\omega-\omega')t\,dt\right]$$

$$= \tau e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega-\omega')t - \tau^2(\omega-\omega')e^{\frac{t}{\tau}}\cos(\omega-\omega')t - \tau^2(\omega-\omega')^2\int e^{\frac{t}{\tau}}\sin(\omega-\omega')t\,dt$$

$$\therefore \int e^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega-\omega')t\,dt = \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega-\omega')^2}\left[\sin(\omega-\omega')t - \tau(\omega-\omega')\cos(\omega-\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$\therefore \int \frac{R(t)y_1}{W}dt = -\frac{\omega v_0}{2\omega' L}\left[\frac{\tau}{1+\tau^2(\omega+\omega')^2}\left[\sin(\omega+\omega')t - \tau(\omega+\omega')\cos(\omega+\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}\right.$$

$$\left.+\frac{\tau}{1+\tau^2(\omega-\omega')^2}\left[\sin(\omega-\omega')t - \tau(\omega-\omega')\cos(\omega-\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}\right]$$

よって

$$i(t) = C_1y_1 + C_2y_2$$

$$= \left\{-\frac{\omega v_0}{2\omega' L}\left[\frac{\tau}{1+\tau^2(\omega+\omega')^2}\left[\cos(\omega+\omega')t + \tau(\omega+\omega')\sin(\omega+\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\tau}{1+\tau^2(\omega-\omega')^2}\left[\cos(\omega-\omega')t + \tau(\omega-\omega')\sin(\omega-\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}\right] + C_1'\right\}e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\omega' t$$

$$+\left\{-\frac{\omega v_0}{2\omega' L}\left[\frac{\tau}{1+\tau^2(\omega+\omega')^2}\left[\sin(\omega+\omega')t - \tau(\omega+\omega')\cos(\omega+\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\tau}{1+\tau^2(\omega-\omega')^2}\left[\sin(\omega-\omega')t - \tau(\omega-\omega')\cos(\omega-\omega')t\right]e^{\frac{t}{\tau}}\right] + C_2'\right\}e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\omega' t$$

$$
\begin{aligned}
&= C_1' e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\omega' t + C_2' e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\omega' t \\
&- \frac{\omega v_0}{2\omega' L} \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega+\omega')^2} \{[\sin(\omega+\omega')t - \tau(\omega+\omega')\cos(\omega+\omega')t]\sin\omega' t \\
&+ [\cos(\omega+\omega')t + \tau(\omega+\omega')\sin(\omega+\omega')t]\cos\omega' t\} \\
&- \frac{\omega v_0}{2\omega' L} \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega-\omega')^2} \{[\sin(\omega-\omega')t - \tau(\omega-\omega')\cos(\omega-\omega')t]\sin\omega' t \\
&- [\cos(\omega-\omega')t + \tau(\omega-\omega')\sin(\omega-\omega')t]\cos\omega' t\} \\
&= C_1' e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\omega' t + C_2' e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\omega' t \\
&- \frac{\omega v_0}{2\omega' L} \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega+\omega')^2} \{[\sin(\omega+\omega')t \sin\omega' t + \cos(\omega+\omega')t\cos\omega' t] \\
&- \tau(\omega+\omega')[\cos(\omega+\omega')t\sin\omega' t - \sin(\omega+\omega')t\cos\omega' t]\} \\
&- \frac{\omega v_0}{2\omega' L} \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega-\omega')^2} \{[\sin(\omega-\omega')t \sin\omega' t - \cos(\omega-\omega')t\cos\omega' t] \\
&- \tau(\omega-\omega')[\cos(\omega-\omega')t\sin\omega' t + \sin(\omega-\omega')t\cos\omega' t]\} \\
&= C_1' e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\omega' t + C_2' e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\omega' t \\
&- \frac{\omega v_0}{2\omega' L} \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega+\omega')^2} [\cos\omega t + \tau(\omega+\omega')\sin\omega t] \\
&- \frac{\omega v_0}{2\omega' L} \frac{\tau}{1+\tau^2(\omega-\omega')^2} [-\cos\omega t - \tau(\omega-\omega')\sin\omega t] \\
&= C_1' e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\omega' t + C_2' e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\omega' t \\
&+ \frac{\omega v_0 \tau}{2\omega' L} \left[\left(\frac{1}{1+\tau^2(\omega-\omega')^2} - \frac{1}{1+\tau^2(\omega+\omega')^2} \right) \cos\omega t + \left(\frac{\tau(\omega-\omega')}{1+\tau^2(\omega-\omega')^2} - \frac{\tau(\omega+\omega')}{1+\tau^2(\omega+\omega')^2} \right) \sin\omega t \right] \\
&= C_1' e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\omega' t + C_2' e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\omega' t \\
&+ \frac{\omega v_0 \tau}{2\omega' L} \left[\frac{4\tau^2\omega\omega'}{\{1+\tau^2(\omega-\omega')^2\}\{1+\tau^2(\omega+\omega')^2\}} \cos\omega t + \frac{2\omega'\tau\{\tau^2(\omega^2-\omega'^2)-1\}}{\{1+\tau^2(\omega-\omega')^2\}\{1+\tau^2(\omega+\omega')^2\}} \sin\omega t \right]
\end{aligned}
$$

$$= C_1' e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\omega' t + C_2' e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\omega' t$$

$$+ \frac{\omega v_0}{L}\left[\frac{\frac{2\omega}{\tau}}{\left\{(\omega-\omega')^2+\frac{1}{\tau^2}\right\}\left\{(\omega+\omega')^2+\frac{1}{\tau^2}\right\}}\cos\omega t + \frac{\left\{\left(\omega^2-\omega'^2\right)-\frac{1}{\tau^2}\right\}}{\left\{(\omega-\omega')^2+\frac{1}{\tau^2}\right\}\left\{(\omega+\omega')^2+\frac{1}{\tau^2}\right\}}\sin\omega t\right]$$

ここで、

$$\left\{(\omega-\omega')^2+\frac{1}{\tau^2}\right\}\left\{(\omega+\omega')^2+\frac{1}{\tau^2}\right\} = (\omega-\omega')^2(\omega+\omega')^2 + \left\{(\omega-\omega')^2+(\omega+\omega')^2\right\}\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau^4}$$

$$= (\omega^2-\omega'^2)^2 + \frac{2(\omega^2+\omega'^2)}{\tau^2}+\frac{1}{\tau^4} = \left\{\omega^2-\left(\omega_0{}^2-\frac{1}{\tau^2}\right)\right\}^2 + \frac{2\left\{\omega^2+\left(\omega_0{}^2-\frac{1}{\tau^2}\right)\right\}}{\tau^2}+\frac{1}{\tau^4}$$

$$= \left(\omega^2-\omega_0{}^2\right)^2 + \left(\frac{2\omega}{\tau}\right)^2$$

$$\therefore i(t) = C_1' e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\omega' t + C_2' e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\omega' t$$

$$+ \frac{\omega v_0}{L}\left[\frac{\frac{2\omega}{\tau}}{\left(\omega^2-\omega_0{}^2\right)^2+\left(\frac{2\omega}{\tau}\right)^2}\cos\omega t + \frac{\omega^2-\omega_0{}^2}{\left(\omega^2-\omega_0{}^2\right)^2+\left(\frac{2\omega}{\tau}\right)^2}\sin\omega t\right]$$

$$= C_1' e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\omega' t + C_2' e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\omega' t + \frac{\omega v_0}{L}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0{}^2\right)^2+\left(\frac{2\omega}{\tau}\right)^2}}\cos(\omega t-\phi)$$

ただし、$\tan\phi = \dfrac{\omega^2-\omega_0{}^2}{\frac{2\omega}{\tau}}$

② $v(t)=v_0e^{j\omega t}$ の場合（以下、演習問題）

$y_1=$ $\qquad$ $y_2=$

次にロンスキャン（Wronskian）を求めると、

$$\frac{dy_1}{dt}=$$

$$\frac{dy_2}{dt}=$$

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dt} & \frac{dy_2}{dt} \end{vmatrix}=y_1\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dy_1}{dt}$$

$=$

$=$

$$R(t)=\frac{1}{L}\frac{dv}{dt}=$$

$$-\int\frac{R(t)y_2}{W}dt=$$

$$\int\frac{R(t)y_1}{W}dt=$$

よって非斉次微分方程式の一般解は

$$i(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$