

第10回 2階非斉次線形微分方程式:定数変化法

6月28日(木)

【学習範囲】『理工系のための解く！微分方程式』第3章3.5～4.1(pp.44～56)
詳細は本を参照のこと。

● 解の独立性の判定法

2つの解 y_1, y_2 について、 $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{定数} (y_2 \neq 0)$ あるいは $\frac{y_2}{y_1} \neq \text{定数} (y_1 \neq 0)$

のとき y_1, y_2 は1次独立であるという。

その判定は、

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix} = y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \quad (W: \text{ロンスキアン})$$

で調べられる($W \neq 0$)。

● 2階非斉次線形微分方程式の解法

定数変化法

2階非斉次線形微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$ において、
 $R(x) = 0$ とおいた斉次微分方程式の2つの独立な基本解を $y_1(x), y_2(x)$ とする。

非斉次微分方程式の解は以下で与えられる。

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

$$c_1(x) = -\int \frac{R(x)y_2(x)}{W} dx + c_1^0$$

$$c_2(x) = \int \frac{R(x)y_1(x)}{W} dx + c_2^0$$

(c_1^0, c_2^0 は任意定数, W はロンスキアン)

学習範囲の内容をしっかりと身につけるため、本の問題を解いてみよう。