

第9回 2階斉次線形微分方程式:基本解と一般解

6月21日(木)

【学習範囲】『理工系のための解く！微分方程式』第3章3.1～3.5(pp.31～44)
詳細は本を参照のこと。

● 線形微分方程式

$y, y', y'', \dots$ について1次方程式であるもの。

最高階数は2階であるものを2階線形微分方程式と呼ぶ。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

定数項が0であるものを2階斉次線形微分方程式と呼ぶ。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

● 基本解と一般解

1次独立な2つの解:基本解

基本解の線形結合:一般解

● 定係数斉次線形微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0 \quad \text{の } P, Q \text{ が定数であるもの。}$$

解法 特性方程式より求める。

$$y = ce^{\lambda x} \quad \text{とおくと、}$$

$$\frac{dy}{dx} = c\lambda e^{\lambda x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = c\lambda^2 e^{\lambda x}$$

もとの方程式に代入して、

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = 0 \quad (\text{特性方程式})$$

$$\lambda = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

(1) λ が重根でない場合

基本解: $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$

一般解: $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ (c_1, c_2 は定数)

(2) λ が重根の場合

基本解: $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}$

一般解: $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$ (c_1, c_2 は定数)

● 2階斉次線形微分方程式の基本解の1つを見つける

解法 $\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ の $P(x), Q(x)$ が以下の関係式を満たす場合の

解法

(1) $m(m-1) + mP(x) + x^2 Q(x) = 0$ の場合、 $y = x^m$ が基本解の1つ

(2) $m^2 + mP(x) + Q(x) = 0$ の場合、 $y = e^{mx}$ が基本解の1つ

● 2階斉次線形微分方程式の基本解の1つから1次独立な基本解を導出する

解法 $\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ の基本解の1つを y_1 とするとき、他方の基本解 y_2

は以下で与えられる。

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x') dx'\right) dx$$

● 1階微分項を消去する方法

解法 $y = uv$ とおいて、微分方程式を u に関する2階斉次線形微分方程式に変換

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \exp\left(-\frac{1}{2} \int P(x) dx\right)$$
$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(Q(x) - \frac{1}{2} \frac{dP(x)}{dx} - \frac{1}{4} P(x)^2\right) u = 0$$

より $y = uv$ から求まる。

学習範囲の内容をしっかりと身につけるため、本の問題を解いてみよう。