第８回　１階常微分方程式：階数の引き下げ・RC／RL回路の例

６月１４日（木）

【学習範囲】　『理工系のための解く！微分方程式』第２章2.5～2.7（pp.23～30）
詳細は本を参照のこと。

⑤　階数の引き下げ（ x が含まれない場合）

解法

２階常微分方程式に x が含まれない場合、 $\dfrac{dy}{dx}=p$ とおいて

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$$

➡ y を独立変数とした p の１階常微分方程式に帰する。

⑥ 階数の引き下げ（y, y', y'' の同次式）

解法

y, y', y'' について同次式である場合、 $y = ce^z$ （cは定数）とおいて、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = ce^z \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = c\left(e^z \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dx} + e^z \frac{d^2z}{dx^2}\right) = ce^z\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{d^2z}{dx^2}\right]$$

➡ ce^z がキャンセルされ、x, z', z'' の微分方程式に帰着される。

学習範囲の内容をしっかり身につけるため、本の問題を解いてみよう。

平成１９年度　解析学（電気電子）（O）講義資料
「線形１次微分方程式の解法（RC・RL 回路編）」

2007.6.14

［1］　線形１次微分方程式の解の一般式の導出

[公式]

1 階線形微分方程式 $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)}$ ⋯(1)の一般解は式(2)で与えられる。

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_0\right)\cdots(2)$$

ただし $\boldsymbol{c_0}$ は定数である。

[導出方法]

① $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ の両辺に $e^{\int P(x)dx}$ を掛ける。

両辺に $e^{\int P(x)dx}$ をかけて、

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+P(x)ye^{\int P(x)dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx} \qquad (3)$$

いま $ye^{\int P(x)dx}$ を $\boldsymbol{x}$ について微分すると、

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right)=e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+y\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\right)=e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+ye^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}\int P(x)dx$$

$$=e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+P(x)ye^{\int P(x)dx}$$

よって式(3)を変形して、

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$\therefore ye^{\int P(x)dx}=\int\left[Q(x)e^{\int P(x)dx}\right]dx+c_0$$

$$\therefore y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int\left[Q(x)e^{\int P(x)dx}\right]dx+c_0\right)$$

② $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\cdots(4)$ の $Q(x)=0$ とおき、解 y_0 を求める。

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-P(x)y$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-P(x)$$
$$\int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx$$
$$\log|y|=-\int P(x)dx+k \quad (k\text{は定数})$$
$$y_0=k'e^{-\int P(x)dx} \quad (k'=\pm e^k)$$

次に、元の微分方程式の解を y_0 を用いて $y=c(x)y_0$ とおけると仮定し、$c(x)$ を求める。

$y=c(x)y_0$ を式(4)に代入

$$\frac{d(cy_0)}{dx}+P(x)cy_0=Q(x)$$
$$\left(y_0\frac{dc}{dx}+c\frac{dy_0}{dx}\right)+cP(x)y_0=Q(x)$$
$$y_0\frac{dc}{dx}+c\left(\frac{dy_0}{dx}+P(x)y_0\right)=Q(x)$$

ここで y_0 は $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$ の解なので、$\dfrac{dy_0}{dx}+P(x)y_0=0$ だから、

$$y_0\frac{dc}{dx}=Q(x)$$
$$\frac{dc}{dx}=\frac{Q(x)}{y_0}=\frac{Q(x)}{k'e^{-\int P(x)dx}}=\frac{1}{k'}Q(x)e^{\int P(x)dx}$$
$$c=\frac{1}{k'}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_0 \quad (c_0\text{は定数})$$
$$\therefore\ y=cy_0=\left(\frac{1}{k'}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_0\right)k'e^{-\int P(x)dx}$$
$$=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_0\right)$$

［2］　RC 回路の解法

①　直流（DC）電源

図１に示す RC 回路を考える。初期状態ではスイッチ S が開放であり、キャパシタには電荷が蓄積されていないとする。

直流電圧源の両端電圧を E とし、時刻 $t=0$ においてスイッチ S を閉じたとき、時間 t に対して回路に流れる電流 $i(t)$ を求めてみよう。

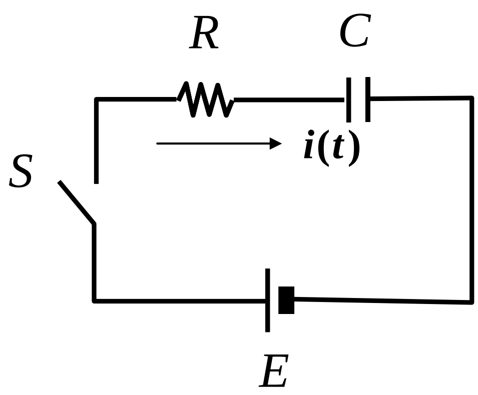


図１　RC 回路（直流電圧源）

時刻 $t=0$ 以降において、電流 $i(t)$ を用いて電圧に対する式をたてると以下の通りになる。

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=E$$

両辺を t について微分すると、$t=0$ 以降は E は一定であり $\dfrac{dE}{dt}=0$ だから、

$$R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0$$

$$\frac{di}{dt}=-\frac{1}{CR}i$$

$$\frac{1}{i}\frac{di}{dt}=-\frac{1}{CR}$$

$$\int\frac{di}{i}=-\frac{1}{CR}\int dt$$

$$\log|i|=-\frac{t}{CR}+k \quad (k\text{は定数})$$

$$i=k'e^{-\frac{t}{CR}} \quad (k'=\pm e^{k})$$

ここで $t=0$ においてキャパシタ両端の電圧は 0 なので、$i(0)=\dfrac{E}{R}$ である。

よって $k'=\dfrac{E}{R}$ なので、

$$i(t)=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$$

模式的に図示すると図２のようになる。

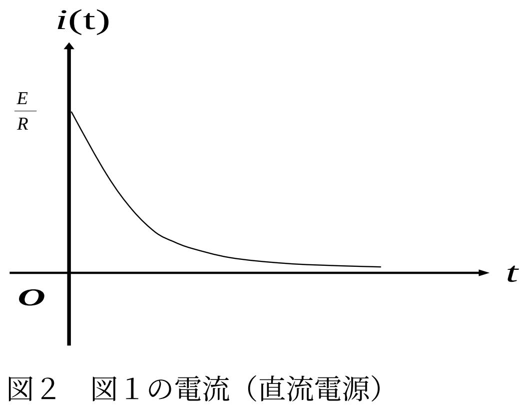


図２　図１の電流（直流電源）

② 交流（AC）電源

図３に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし $v(t)=V_0\cos\omega_0 t \quad (t\geq 0),\ \ 0 \quad (t<0)$ とおく。

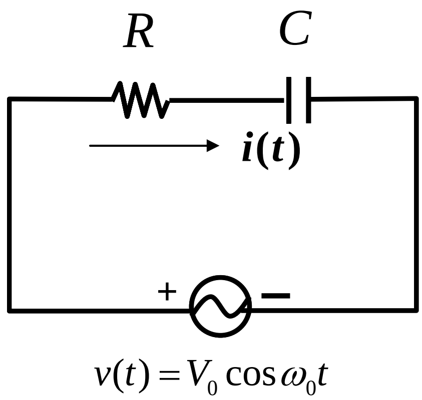


図３　RC 回路（交流電圧源）

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=V_0\cos\omega_0 t$$

両辺を t について微分すると、

$$R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=-\omega_0 V_0\sin\omega_0 t$$

$$\frac{di}{dt}+\frac{i}{CR}=-\frac{\omega_0 V_0}{R}\sin\omega_0 t$$

[１]の式(1)の変数 x を t に置き換えてあてはめると $P(t)=\dfrac{1}{CR}$, $Q(t)=-\dfrac{\omega_0 V_0}{R}\sin\omega_0 t$ なので、式(2)に代入して、

$$i(t)=e^{-\int\frac{1}{CR}dt}\left(\int\left(-\frac{\omega_0 V_0}{R}\sin\omega_0 t\right)e^{\int\frac{1}{CR}dt}dt+c_0\right)$$

$$=\left(-\frac{\omega_0 V_0}{R}\right)e^{-\frac{t}{CR}}\left(\int e^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t dt+c_0\right)$$

$P=\displaystyle\int e^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t dt$ とおいて部分積分を計算すると、

$$P=\int e^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t dt=CR\cdot e^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t-CR\omega_0\int e^{\frac{t}{CR}}\cos\omega_0 t dt$$

$$=CR\cdot e^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t-CR\omega_0\left(CR\cdot e^{\frac{t}{CR}}\cos\omega_0 t+CR\omega_0\int e^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t dt\right)$$

$$=CR\cdot e^{\frac{t}{CR}}\left(-\omega_0 CR\cos\omega_0 t+\sin\omega_0 t\right)-(\omega_0 CR)^2 P$$

$$\left\{1+(\omega_0 CR)^2\right\}P=CR\cdot e^{\frac{t}{CR}}\left(-\omega_0 CR\cos\omega_0 t+\sin\omega_0 t\right)$$

$$\therefore P=CR\cdot e^{\frac{t}{CR}}\frac{-\omega_0 CR\cos\omega_0 t+\sin\omega_0 t}{1+(\omega_0 CR)^2}$$

$$=-\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot e^{\frac{t}{CR}}\left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cos\omega_0 t-\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\sin\omega_0 t\right)$$

$$=-\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot e^{\frac{t}{CR}}\left(\cos\phi\cos\omega_0 t-\sin\phi\sin\omega_0 t\right)\quad (\tan\phi=\frac{1}{\omega_0 CR})$$

$$=-\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot e^{\frac{t}{CR}}\cos(\omega_0 t+\phi)$$

よって、

$$i(t)=\left(-\frac{\omega_0 V_0}{R}\right)e^{-\frac{t}{CR}}\left(\int e^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t dt+c_0\right)$$

$$=\left(-\frac{\omega_0 V_0}{R}\right)e^{-\frac{t}{CR}}\left(-\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot e^{\frac{t}{CR}}\cos(\omega_0 t+\phi)+c_0\right)$$

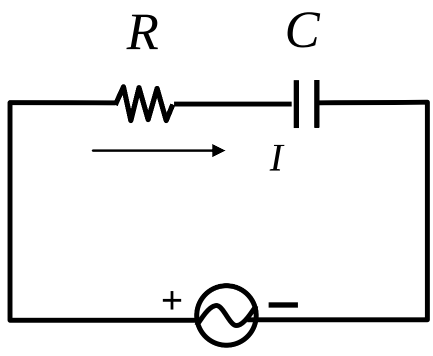
$$=\left(-\frac{c_0\omega_0 V_0}{R}\right)e^{-\frac{t}{CR}}+\frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cos(\omega_0 t+\phi)$$

ここで $t=0$ において電源の電圧は V_0 であり、キャパシタの蓄積電荷量が 0 なので $i(0)=\frac{V_0}{R}$ であるから、上式に代入して、

$$c_0=-\frac{1}{\omega_0}+\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cos\phi=-\frac{1}{\omega_0}+\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}$$

$$=\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{-1}{1+(\omega_0 CR)^2}\right)$$

$$\therefore i(t)=\frac{V_0}{R}\frac{1}{1+(\omega_0 CR)^2}e^{-\frac{t}{CR}}+\frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cos(\omega_0 t+\phi)$$



$$v(t)=V_0e^{j\omega_0 t}$$

図４　RC 回路（交流電圧源）

③　交流回路を $v(t)=V_0e^{j\omega 0t}$ とおいて解く（交流の定常解）。

$$I=\frac{V_oe^{j\omega 0t}}{R+\dfrac{1}{j\omega_0 C}}=\frac{j\omega_0 CV_oe^{j\omega 0t}}{1+j\omega_0 CR}$$

$$=\frac{j\omega_0 C(1-j\omega_0 CR)V_o}{1+(\omega_0 CR)^2}e^{j\omega 0t}$$

$$=\frac{\omega_0 C(\omega_0 CR-j)V_o}{1+(\omega_0 CR)^2}e^{j\omega 0t}$$

$$=\frac{\omega_0 CV_o}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}+j\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\right)e^{j\omega_0 t}$$

$$=\frac{\omega_0 CV_o}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t}\quad(\tan\phi=\frac{1}{\omega_0 CR})$$

$$=\frac{\omega_0 CV_o}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}e^{j(\omega_0 t+\phi)}$$

よって実部をとって $i(t)$ が求まる。

$$i(t)=\frac{\omega_0 CV_o}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cos(\omega_0 t+\phi)$$

この結果は②と一致する。

［3］ RL 回路の解法

① 直流（DC）電源

図５に示す RC 回路を考える。初期状態ではスイッチ S が開放されているとする。

直流電圧源の両端電圧を E とし、時刻 $t=0$ においてスイッチ S を閉じたとき、時間 t に対して回路に流れる電流 $i(t)$ を求めてみよう。

時刻 $t=0$ 以降において、電流 $i(t)$ を用いて電圧に対する式をたてると以下の通りになる。

$$Ri(t)+L\frac{di}{dt}=E$$

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}$$

［1］の式(1)の変数 x を t に置き換えてあてはめると

$P(t)=\dfrac{R}{L},\ Q(t)=\dfrac{E}{L}$ なので、式(2)に代入して、

$$i(t)=e^{-\int\frac{R}{L}dt}\left(\int\frac{E}{L}e^{\int\frac{R}{L}dt}dt+c_0\right)$$

$$=\frac{E}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int e^{\frac{R}{L}t}dt+c_0\right)=\frac{E}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}+c_0\right)$$

$$=\frac{E}{R}+c_0\frac{E}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

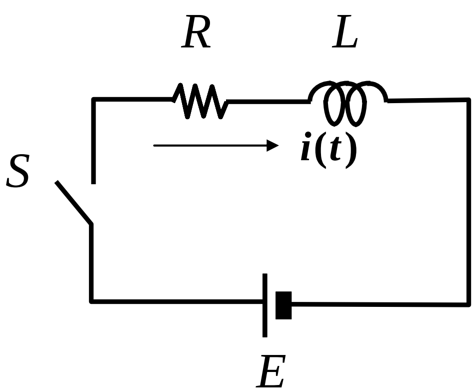


図５ RL 回路（直流電圧源）

ここで $t=0$ においてインダクタ両端の電圧は E なので、$i(0)=0$ である。

よって、

$$\frac{E}{R}+c_0\frac{E}{L}=0$$

$$c_0=-\frac{L}{R}$$

$$\therefore i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

模式的に図示すると図６のようになる。

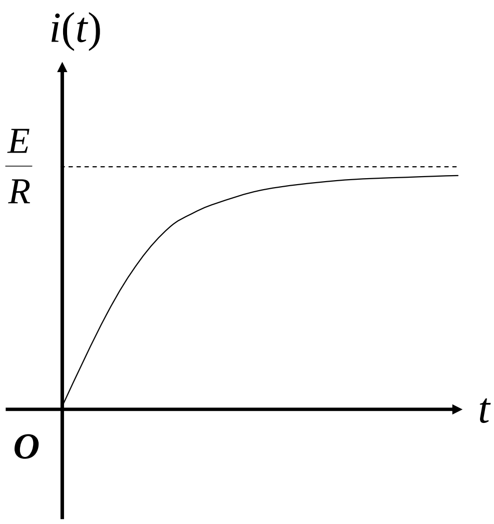
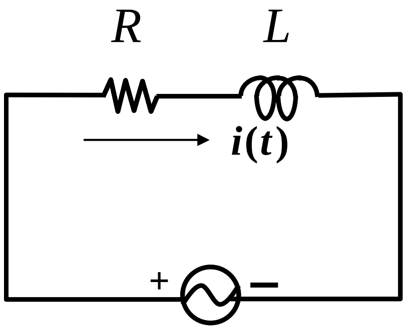


図６ 図５の電流（直流電源）

② 交流（AC）電源

図７に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし $v(t) = V_0 \cos\omega_0 t \quad (t \geq 0),\ \ 0 \quad (t < 0)$ とおく。



$v(t) = V_0 \cos\omega_0 t$

図７　RL 回路（交流電圧源）

$$Ri(t) + L\frac{di}{dt} = V_0 \cos\omega_0 t$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_0}{L}\cos\omega_0 t$$

[１]の式(1)の変数 x を t に置き換えてあてはめると $P(t) = \dfrac{R}{L},\ \ Q(t) = \dfrac{V_0}{L}\cos\omega_0 t$ なので、式(2)に代入して、

$$i(t) = e^{-\int \frac{R}{L}dt}\left(\int\left(\frac{V_0}{L}\cos\omega_0 t\right)e^{\int \frac{R}{L}dt}dt + c_0\right)$$

$$= \left(\frac{V_0}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t dt + c_0\right)$$

$P = \int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t dt$ とおいて部分積分を計算すると、

$$P = \int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t dt = \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t + \frac{L}{R}\omega_0\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega_0 t dt$$

$$= \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R}\left(\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega_0 t - \frac{\omega_0 L}{R}\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t dt\right)$$

$$= \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left(\cos\omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R}\sin\omega_0 t\right) - \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2 P$$

$$\left\{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2\right\}P = \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left(\cos\omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R}\sin\omega_0 t\right)$$

$$\therefore P = \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\frac{\cos\omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R}\sin\omega_0 t}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \cos\omega_0 t + \frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \sin\omega_0 t \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\cos\phi\cos\omega_0 t + \sin\phi\sin\omega_0 t \right) \quad (\tan\phi = \frac{\omega_0 L}{R})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

よって、

$$i(t) = \left(\frac{V_0}{L}\right) e^{-\frac{R}{L}t} \left(\int e^{\frac{R}{L}t} \cos\omega_0 t dt + c_0 \right)$$

$$= \left(\frac{V_0}{L}\right) e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos(\omega_0 t - \phi) + c_0 \right)$$

$$= \left(\frac{c_0 V_0}{L}\right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

ここで $i(0) = 0$ なので、上式に代入して、

$$c_0 = -\frac{L}{R} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \cos\phi = -\frac{L}{R} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} = -\frac{L}{R} \frac{1}{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}$$

$$\therefore i(t) = \frac{V_0}{R} \left[-\frac{1}{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \cos(\omega_0 t - \phi) \right]$$

④　交流回路を $v(t)=V_0e^{j\omega 0t}$ とおいて解く

（交流の定常解）。

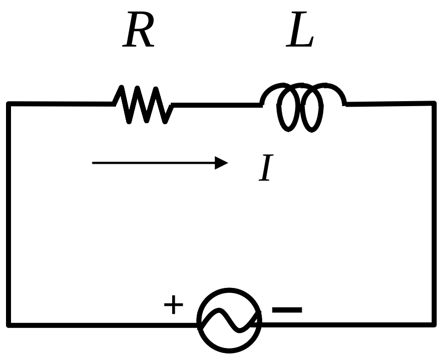
$$I=\frac{V_oe^{j\omega_0 t}}{R+j\omega_0 L}=\frac{V_0}{R}\frac{1}{1+\left(j\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)}e^{j\omega_0 t}$$

$$=\frac{V_0}{R}\frac{1-\left(j\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)}{1+\left(\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)^2}e^{j\omega_0 t}$$

$$=\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}-j\frac{\dfrac{\omega_0 L}{R}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}}\right)e^{j\omega_0 t}$$

$$=\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}e^{-j\phi}e^{j\omega_0 t}\quad (\tan\phi=\frac{\omega_0 L}{R})$$

$$=\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}e^{j(\omega_0 t-\phi)}$$



$v(t)=V_0e^{j\omega 0t}$

図８　RL 回路（交流電圧源）

よって実部をとって $i(t)$ が求まる。

$$i(t)=\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}\cos(\omega_0 t-\phi)$$

［2］の RC 回路と比べると、位相の進み・遅れの関係が逆であることがわかる。