

第7回 1階常微分方程式:変数分離, 同次形, 階数の引き下げ

6月7日(木)

【学習範囲】『理工系のための解く! 微分方程式』第1章1.1～第2章2.4(pp.1～24)
詳細は本を参照のこと。

● 常微分方程式

y が x の1変数関数のとき、 $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}, \dots$ (y の n 階微分)を含む方程式。

● 1階常微分方程式の解法

① 変数分離形

x と x の関数 y が次の形に整理される微分方程式を変数分離形と呼ぶ。

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{左辺には } y \text{ のみが現れ、右辺には } x \text{ のみが現れる。}$$

解法

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$G(y) = F(x) + C \quad (C \text{ は定数}) \quad \Rightarrow \quad \text{一般解}$$

※特殊解は初期条件を用いて導出する。

② $y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$ 形

解法

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

$u = \alpha x + \beta y + \gamma$ とおくと、 $\frac{du}{dx} = \alpha + \beta y'$ なので、元の微分方程式を代入して

$$\frac{du}{dx} = u' = \beta f(u) + \alpha$$

$$\frac{1}{\beta f(u) + \alpha} \frac{du}{dx} = 1 \quad \rightarrow \quad \text{変数分離形となっている}$$

①の解法により u を求めた後、 $u = \alpha x + \beta y + \gamma$ を代入して y を求める。

③ 同次形

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ のように、 $\frac{y}{x}$ が一塊の形に整理される微分方程式を同次形と呼ぶ。

解法

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{とおく。}$$

$$y = ux \quad \text{より、} \quad y' = xu' + u$$

もとの微分方程式に代入

$$y' = xu' + u = f(u)$$

$$xu' = f(u) - u$$

ここで $f(u) - u \neq 0$ のとき、

$$\frac{1}{f(u) - u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

両辺を x で積分して、

$$\int \frac{1}{f(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx + C = \log|x| + C$$

$$G(u) = \log|x| + C$$

ここで $\frac{1}{f(u) - u}$ の原始関数を $G(u)$ とおいている。

➡ 求めた u に $u = \frac{y}{x}$ を代入して y を求める。

● 1階常微分方程式の解法(第7回の続き)

④ 階数の引き下げ(y が含まれない場合)

解法

2階常微分方程式に y が含まれない場合、 $\frac{dy}{dx} = p$ において
 p の1階常微分方程式に帰する。

学習範囲の内容をしっかりと身につけるため、本の問題を解いてみよう。