

第6回 ローラン級数展開, 留数

5月24日 (木)

【学習範囲】 『理工系のための解く！複素解析』第5章5.2～第6章6.3 (pp.128～154)
詳細は本を参照のこと。

● べき級数展開の例 (マクローリン展開)

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{すべての } z \text{ に対して成立})$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \quad (\text{すべての } z \text{ に対して成立})$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \cdots + \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} \quad (\text{すべての } z \text{ に対して成立})$$

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots + \frac{1}{n+1}z^{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1} \quad (|z| < 1 \text{ に対して成立})$$

● 既知のべき級数展開の利用

$\cos z^2$ の級数展開は、 $\cos z$ の級数展開の z に z^2 を代入すれば求まる。

上式を用いて
$$\cos z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{4n}$$

● ローラン級数展開

正則でない点を中心とした べき級数

$f(z)$ が $z = z_0$ を除いて正則のとき、 $z = z_0$ を中心に展開したローラン級数展開は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$b_n = \frac{1}{j2\pi} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$ ではあるが、よく知られた級数展開を利用して

求めることが多い。

例 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ の $z = 0$ を中心とするローラン級数展開を求める。

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ は $z = 0$ を特異点として持つ。

$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n$ であり、 $u = \frac{1}{z}$ とおいて、 $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n$

● 特異点の分類

ローラン級数展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n}$ において、

右辺第1項はテイラー展開

右辺第2項をローラン級数展開の主要部と呼ぶ。

主要部により、特異点は以下の3種類に分類される。

① 主要部がない ($b_{-n} = 0$ ($n \geq 1$))

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \quad : \text{除去可能な特異点}$$

② 主要部が第m項まで存在 ($b_{-m} \neq 0$)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n + \frac{b_{-1}}{z-z_0} + \cdots + \frac{b_{-m}}{(z-z_0)^m} \quad : m\text{位の極}$$

③ 主要部が無限項まで存在

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad : \text{真性特異点}$$

● 留数の定義

関数 $f(z)$ を特異点 $z = z_0$ の周りを周回積分して、 $j2\pi$ で割った値。

➡
$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{j2\pi} \int_C f(z) dz$$

● 留数の求め方

① ローラン級数展開の-1次項の係数から求める。

関数 $f(z)$ のローラン級数展開は、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

両辺を、 $z = z_0$ を含む閉曲線 C の周りに周回積分を行う。

C を $z = z_0$ を中心とする円とすると、第3回の例より、

$$\int_C f(z) dz = j2\pi b_{-1} \quad (-1\text{次項以外は}C\text{上および}C\text{内で正則なのでコーシーの定理により積分値}0)$$

$$\therefore \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{j2\pi} \int_C f(z) dz = b_{-1}$$

② 公式から求める。

公式1

m位の極の留数は、

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]_{z=z_0}$$

公式2

1位の極の留数は、

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = (z - z_0) f(z) \Big|_{z=z_0}$$

公式3

$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ において $g(z)$ が $z = z_0$ で正則のとき、

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]_{z=z_0}$$

③ $f(z)$ が $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ で表される場合。ただし $h(z), g(z)$ は $z = z_0$ で正則であり、
かつ $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$ である。

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

● 留数の定理

閉曲線Cの内部にm個の特異点 $z_1, z_2, \dots, z_m$ があるとき、

$$\int_C f(z) dz = j2\pi \sum_{i=1}^m \text{Res}(f, z_i)$$

※ 周回積分の値は、閉曲線C内の特異点を中心とする留数の和に $j2\pi$ をかけたものとなる。

学習範囲の内容をしっかりと身につけるため、本の問題を解いてみよう。