

第5回 コーシーの積分公式、級数展開

5月18日(木)

【学習範囲】『理工系のための解く！複素解析』第4章4.5～第5章5.2(pp.115～127)
詳細は本を参照のこと。

● コーシーの定理

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C 上と C の内部で正則のとき、

$$\int_C f(z)dz = 0$$

コーシーの積分公式

単一閉曲線: 自分自身と交わらずに閉じている曲線

● 多重連結領域の場合

単一閉曲線 C の内部に単一閉曲線 $C_1, C_2, \dots, C_k$ があり、 C との間の領域で関数 $f(z)$ が正則のとき、

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^k \int_{C_n} f(z)dz$$

- コーシーの積分公式

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C 上と C の内部で正則であり、点 a を C 内の点とするとき、

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = j2\pi f(a)$$

- グルサの定理

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C 上と C の内部で正則であり、点 a を C 内の点とするとき、

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{j2\pi}{n!} f^{(n)}(a)$$

● 級数展開

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots + a_n (z - z_0)^n + \cdots$$

をべき級数、 z_0 を展開の中心という。

● 収束の判定

コーシー・アダマールの公式 $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

ダランベールの判定法 $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

R を収束半径とよび、

$R = 0$ のとき、 $z = z_0$ のときのみ収束

$R = \infty$ のとき、すべての z に対して収束

$|z - z_0| < R$ で収束、 $|z - z_0| > R$ で発散

● 正則な関数のべき級数展開

関数 $f(z)$ の正則な点 z_0 において、 $f(z)$ はべき級数展開できる。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

($z = z_0$ を中心としたテイラー展開)

ただし

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

特に $z = 0$ の場合をマクローリン展開と呼ぶ。

学習範囲の内容をしっかりと身につけるため、本の問題を解いてみよう。