

第4回 コーシーの定理、コーシーの積分公式

5月10日(木)

【学習範囲】『理工系のための解く！複素解析』第3章3.5～第4章4.3(pp.89～110)

詳細は本を参照のこと。

② 2次元静電界

静電ポテンシャル ϕ と電界 E に対して、

$$E = -\text{grad}\phi$$

空間の自由電荷密度 ρ , 誘電率 ε_0 に対して

$$\text{div}E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

が成り立つ。

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \text{div}E = -\text{div}(\text{grad}\phi) = -\nabla^2\phi = -\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)$$

$\rho = 0$ で z 方向に一様な場合を考えて、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$



静電ポテンシャルは調和関数である。
等ポテンシャル線と電気力線は直交し、正則関数の
実部と虚部の関係と類似する。

3. 複素関数の積分, 経路積分, コーシーの定理

● 複素積分の一般的定義

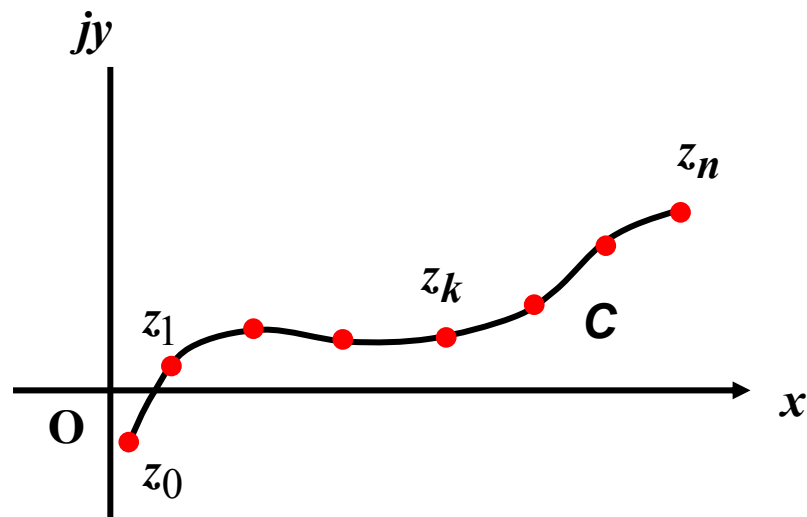
曲線 C を n 分割して各点を $z_k (k = 0, 1, \dots, n)$ とする。

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

に対して $|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}| \rightarrow 0$
としたとき、

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_C f(z) dz$$

を曲線 C に沿った複素積分と呼ぶ。



● 不定積分(原始関数)

$\int_C f(z)dz$ において $f(z)$ が正則ならば、実関数と同様に定義される。

すなわち $F'(z) = f(z)$ の関係にある正則な関数 $F(z)$ を $f(z)$ の不定積分(原始関数)という。

$$\int z^n dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1} \text{ (ただし } n \neq -1 \text{)}$$

$$\int e^z dz = e^z$$

$$\int \sin z dz = -\cos z$$

$$\int \cos z dz = \sin z$$

など。

● 正則な関数の定積分

積分路 C の始点を $z(a)$, 終点を $z(b)$ とすると、積分路上で正則な複素関数に対し

$$\int_C f(z)dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

※ 積分路の取り方によらず値が一定となることに注意。

- 複素積分の実関数を用いた表記

$\int_C f(z)dz$ に $f(z) = u + jv$, $dz = dx + jdy$ を代入して、

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + j \int_C (vdx + udy)$$

- 媒介変数を用いた表記

$z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) に対して

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt$$

- 大事な例

$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz$ を中心が $z = a$, 半径が r の円 C を積分路として求める。

$$z = a + re^{j\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

とおくと、

$$dz = jre^{j\theta} d\theta$$

① $n=1$ の場合、

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{j\theta}} jre^{j\theta} d\theta \\ &= j[\theta]_0^{2\pi} \\ &= j2\pi\end{aligned}$$

① $n \neq 1$ の場合、

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n e^{jn\theta}} jre^{j\theta} d\theta \\ &= j \int_0^{2\pi} r^{1-n} e^{j(1-n)\theta} d\theta = jr^{1-n} \left[\frac{e^{j(1-n)\theta}}{j(1-n)\theta} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

この結果はよく使われるので覚えておくこと。

● よく使う積分公式

$$\int_C \{f(z) + g(z)\} dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$$

$$\int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz \quad (k \text{ は定数})$$

$$\int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) dz$$

$$\int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

学習範囲の内容をしっかりと身につけるため、本の問題を解いてみよう。