

第3回 調和関数, 複素関数の積分

4月26日(木)

【学習範囲】『理工系のための解く！複素解析』第3章3.2～3.5(pp.72～89)

詳細は本を参照のこと。

● コーシー・リーマンの関係式

[3章の続き]

複素関数 $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ において $u(x, y), v(x, y)$ が
連続な偏導関数を持つ場合、 $f(z)$ が正則であるための必要十分条件は
次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

※ この関係式を満足しても特異点を持つ場合はその点で正則でない。

正則関数の微分は以下で与えられる。

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}$$

● 調和関数

$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ が正則であれば、 $u(x, y), v(x, y)$ は調和関数であり

次式を満足する。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

(2次元ラプラス方程式)

実部 $u(x, y)$ あるいは虚部 $v(x, y)$ だけがわかっており、調和関数の場合に他方を求めることができる。

➡ コーシー・リーマンの関係式を用いればよい。

● 正則関数の性質の例

① 直交関係と等角写像

正則関数 $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ において、 a, b を定数とすると、

2つの曲線群

$$u(x, y) = a$$

$$v(x, y) = b$$

は互いに直交する。

※ $u - jv$ 面上の曲線(直線) $u = a, v = b$ は互いに直交しており、
 $x - jy$ 面上の曲線 $u(x, y) = a, v(x, y) = b$ も互いに直交している。
このように複素関数を介して変換したとき、曲線間の交わる角度が保存される
変換を等角写像と呼ぶ。

学習範囲の内容をしっかりと身につけるため、本の問題を解いてみよう。