２００６年度解析学（電気電子）（O）

担当：　植之原　裕行

【成績評価】　演習３０点，中間試験３０点，期末試験４０点

【教科書･参考書等】

(教科書)

石井彰三監修　水本哲弥著　『理工系のための解く！微分方程式』(講談社)

石井彰三監修　安岡康一･植之原裕行･宮本智之著

『理工系のための解く！複素解析』(講 談社)

(参考書)

内藤喜之著　『電気･電子基礎数学』(電気学会)

伊賀健一著　『応用電気数学』(オーム社) 絶版　(図書館に所蔵あり)

複素関数を学ぶ意味とは？

『理工系のための解く！複素解析』第1章1．6にいくつか例を挙げましたが、
複素関数とは複数の物理量を数式上で扱う際に解析を簡単に行うための数学的手法です。
物理現象に虚数というものが存在するわけではなく、計算後に実部あるいは虚部を得た
段階で物理上の意味がでてきます。頻繁に使うことになるので良く理解し勉強してください。

(例)

① フーリエ変換

時間波形の周波数成分を数値解析で得る。

② 交流回路

*LCR*回路の電流と電圧の時間変化、位相変化を得る。

③ 誘電率･屈折率

吸収あるいは利得を持つ媒質を電磁波が伝搬するときの強度･位相の変化を得る。

複素屈折率の実部：屈折率
複素屈折率の虚部：利得･損失

など。

講義計画

1．複素関数，オイラーの公式

2．複素関数の微分，コーシー･リーマンの関係式，調和関数

3．複素関数の積分，経路積分，コーシーの定理

4．コーシーの積分公式，留数定理

5．交流回路と複素数，過渡現象と微分方程式

6．1階常微分方程式：変数分離，同次形，階数の引き下げ

7．2階斉次線形微分方程式：基本解と一般解

8．2階斉次線形微分方程式：級数による解法，ベッセル関数

9．2階斉次線形微分方程式：ヘルムホルツ方程式

（デカルト座標，円筒座標，球座標）

10．2階非斉次線形微分方程式：定数変化法，グリーン関数による解法

11．偏微分方程式

第1回　複素関数，オイラーの公式

4月12日 (木)

【学習範囲】　『理工系のための解く！複素解析』第1章～第2章2.3 (pp.1～51)
詳細は本を参照のこと。

1．複素数の基礎 (復習)

- 複素数の四則演算 (加減乗除)

- 複素平面の考え方
  実軸：実部の大きさ
  虚軸：虚部の大きさ
  } を表す。

- 絶対値

  複素数 $z = x + jy$ に対して

  絶対値 $|z| = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

共役複素数

複素数 $z = x + jy$ **に対して**
共役複素数 $\bar{z} = x - jy$

このとき、 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + jy)(x - jy)} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

極座標表現

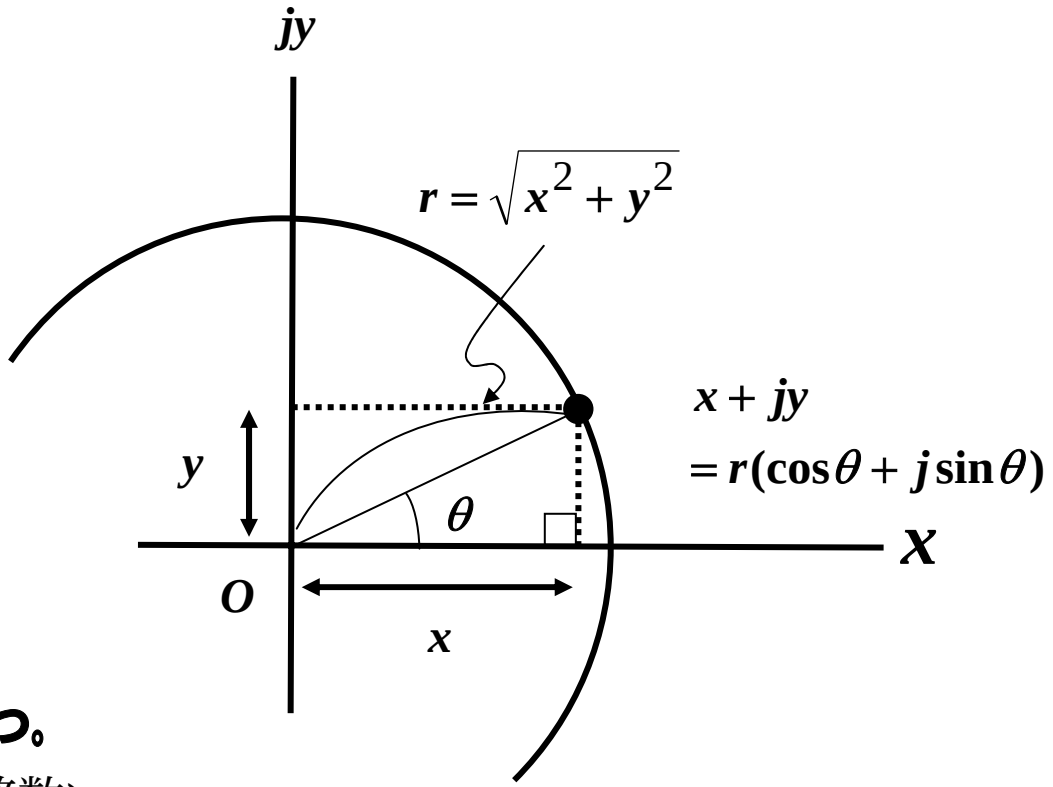
$$z = x + jy$$
$$= r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

ただし

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ **(絶対値)**

$\theta = Argz = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$

(偏角の主値)



偏角は2πの周期性を持つ。

$\arg z = Argz + 2n\pi$ (**n**は整数)

オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$\begin{aligned} z &= x + jy \\ &= r(\cos\theta + j\sin\theta) \\ &= re^{j\theta} \end{aligned}$$

$e^{j\theta}$ の共役複素数

$\overline{e^{j\theta}} = \cos\theta - j\sin\theta = e^{-j\theta}$ なので、

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$e^{j\theta}$ の絶対値

$$e^{j\theta} = \sqrt{e^{j\theta} \times e^{-j\theta}} = 1$$

オイラーの公式を用いて三角公式が簡単に導出可能

べき乗の計算

複素数 z の べき乗：z^n

$$z^n = (re^{j\theta})^n = r^n e^{jn\theta} = r^n(\cos n\theta + j\sin n\theta)$$

※ 偏角は主値を用いればよい。2πの周期性を考慮にいれてもすべて同一の複素数となる。

ド・モアブルの公式

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta$$

➡ 偏角がn倍となる

べき乗根の計算

複素数 z の べき乗根：$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$

$$z^{\frac{1}{n}} = \left[re^{j(\theta+2m\pi)}\right]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{j(\frac{\theta}{n}+\frac{2m\pi}{n})}$$

ただし $m = 0,1,2,\cdots,(n-1)$ の整数

※ 偏角に2πの周期性を考慮することに注意。
またn乗根の解はn個存在することがわかる。

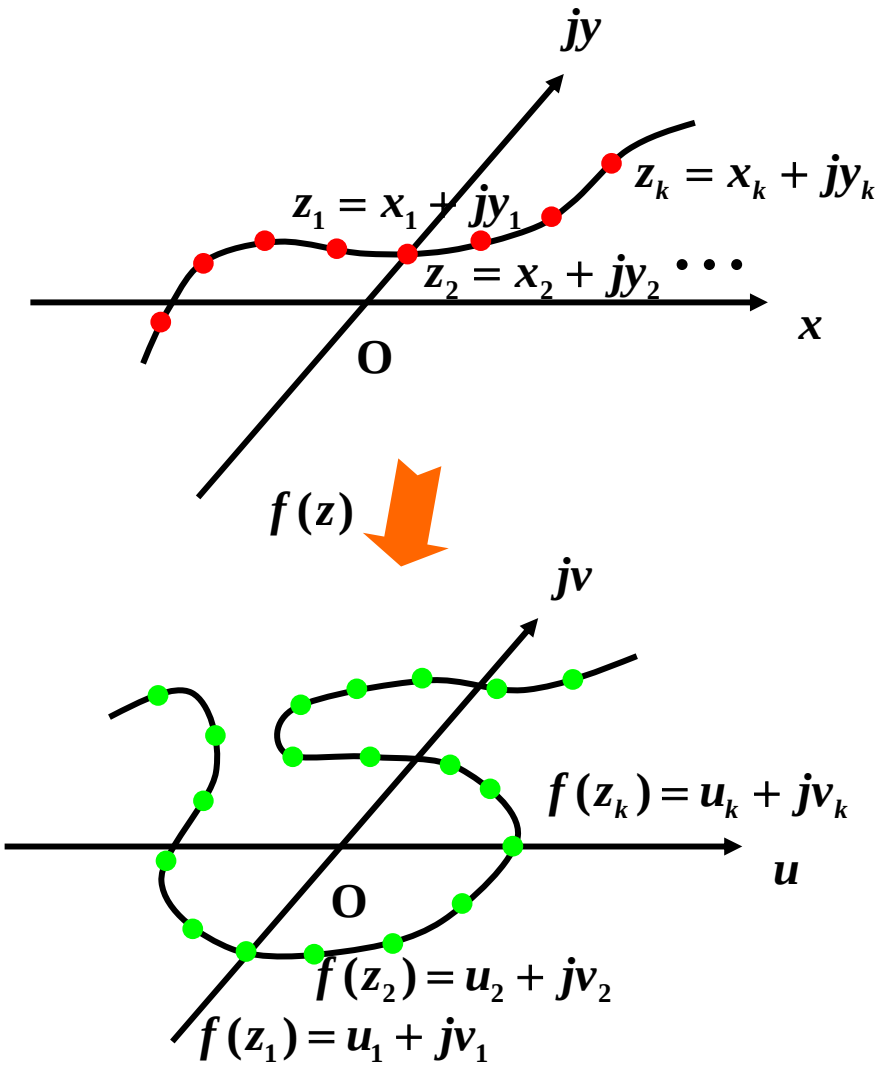
複素関数とは

複素数 $z = x + jy$ **を変数とする**
複素関数 $f(z) = w = u + jv$ **は**
x — jy **平面上の複素数を**
u — jv **平面上の複素数に変換する**
操作である。

よって u **および** v **はともに** x **，** y
の関数であり、

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

とも表される。



いろいろな複素関数の計算の仕方

① 指数関数

実数と同様の積演算が成り立つ。

$$e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

指数関数の方程式の解法

$$e^{z} = Z$$

右辺をオイラーの公式で変形する。

$$e^{z} = Z = R \cdot e^{j(\Theta+2n\pi)}$$

(ただしnは整数)

$$e^{z} = Z = R \cdot e^{j(\Theta+2n\pi)} = e^{\log R + j(\Theta+2n\pi)}$$

$$\therefore z = \log R + j(\Theta + 2n\pi)$$

学習範囲の内容をしっかり身につけるため、本の問題を解いてみよう。