

10.2 ラプラス変換と線形回路

(1)回路応答の過渡解析

ラプラス変換は、定係数の線形微分方程式を解く手段として用いられる。電気回路(線形回路)の過渡応答は微分方程式を解くことによって得られるので、この目的でラプラス変換がよく用いられる。

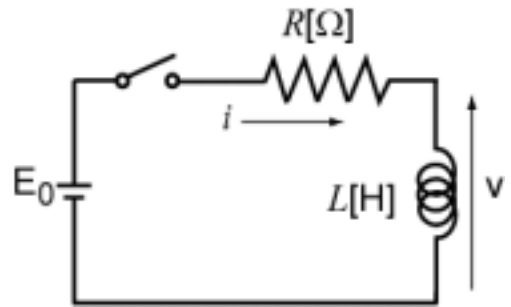
[例]

右の図で、 $t=0$ においてSWがonになったとする。また、SWをonにする直前の電流が $i(0_-)=I_i$ であったとする。 $t=0$ 以後、回路の電圧電流の関係式は次のようになる。

$$L \frac{d}{dt} i + Ri = E_0 \quad (10.9)$$

電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ とすると、式(10.9)のラプラス変換は

$$L(sI(s) - I_i) + RI(s) = \frac{E_0}{s} \quad (10.10)$$



これを $I(s)$ についてまとめると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} (Ls + R)I(s) &= \frac{E_0}{s} + LI_i \\ I(s) &= \frac{E_0}{s(Ls + R)} + \frac{LI_i}{Ls + R} = \frac{E_0}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{L}{Ls + R} \right) + \frac{LI_i}{Ls + R} = \frac{E_0}{R} \frac{1}{s} + \frac{L}{Ls + R} \left(I_i - \frac{E_0}{R} \right) \\ &= \frac{E_0}{R} \frac{1}{s} + \left(I_i - \frac{E_0}{R} \right) \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \end{aligned} \quad (10.11)$$

式(10.11)をラプラス逆変換して、電流 $i(t)$ が次のように求まる。

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + \left(I_i - \frac{E_0}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (10.12)$$

ここで、SWをonにする直前の電流が $i(0_-)=I_i=0$ であったとすると、 $t=0$ 以後に回路を流れる電流は次のようになる。

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

(2)任意の入力信号に対する応答

線形回路の特性が時不変であり、インパルス応答が $T[\delta(t)] = h(t)$ で与えられるものとする。このとき、任意の信号 $f(t)$ を入力に加えた場合の応答 $g(t)$ は、次のようにして求まる。

$$g(t) = T[f(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)T[\delta(t-\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

すなわち、

$$g(t) = f * h \quad (10.13)$$

である。さらに、変数変換により、

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau')T[\delta(\tau')](d\tau') = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

ここで、 $\delta(t) = 0 (t < 0)$ であるから、因果律により $h(t) = 0 (t < 0)$ であることに注意すると、

$$g(t) = \int_0^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (10.14)$$

となる。

さらに、回路応答の初期値をすべて 0 とし、 $t < 0$ において $f(t) = 0$ であるような入力信号を加える場合を考えて式(10.14)の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g(t)e^{-st}dt &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau e^{-st}dt = \int_0^{\infty} h(\tau) \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}dtd\tau \\ &= \int_0^{\infty} h(\tau) \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dte^{-s\tau}d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_0^{\infty} f(t')e^{-st'}dt' \\ &= \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_0^{\infty} f(t')e^{-st'}dt' \end{aligned}$$

すなわち、 $g(t)$ 、 $f(t)$ 、 $h(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $G(s)$ 、 $F(s)$ 、 $H(s)$ と書くことにすれば、

$$G(s) = H(s)F(s) \quad (10.15)$$

が成り立つ。ここで、 $H(s)$ をこの回路の伝達関数とよぶ。

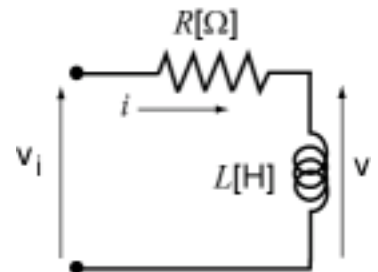
(3)伝達関数

伝達関数 $H(s)$ を求める例を示す。

[例 1]

電源電圧 $v_i(t)$ を入力、L-R 直列回路に流れる電流 $i(t)$ を応答と考える。

$$L \frac{d}{dt} i(t) + Ri(t) = v_i(t) \quad (10.16)$$



電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ とし、初期状態を $i(0_-) = 0$ とおく。さら

に入力電圧として $v_i(t) = \delta(t)$ を考えた場合の応答 $i(t)$ のラプラス変換が伝達関数であるので、式(10.16)から次の関係が成り立つ。

$$sLH(s) + RH(s) = 1$$

すなわち、この回路の伝達関数は

$$H(s) = \frac{1}{R + sL} \quad (10.17)$$

[例 2]

電源電圧 $v_i(t)$ を入力、C-R 直列回路において C の両端に発生する電圧 $v(t)$ を応答と考える。

$$\begin{aligned} v(t) + Ri(t) &= v_i(t) \\ i(t) &= C \frac{dv(t)}{dt} \end{aligned} \quad (10.18)$$

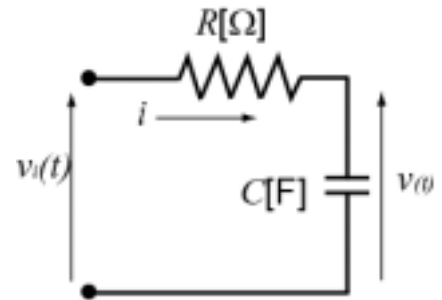
より、 $v_i(t) = \delta(t)$ 、 $v(0_-) = 0$ として両辺をラプラス変換する。
このとき、伝達関数は応答 $v(t)$ のラプラス変換 $H(s) = L[v(t)]$ であるから、

$$H(s) + RCsH(s) = 1$$

すなわち、

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs} \quad (10.19)$$

と求まる。



(4) 系の安定性

系の伝達関数を次のように表すことができたとする。

$$H(s) = \frac{K(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_i) \cdots (s - s_n)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{A_i}{s - s_i} + \cdots$$

これをラプラス逆変換すると、

$$h(t) = (A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \cdots) u(t)$$

で表すことができる。

ここで、伝達関数の極 s_i が実数の場合と複素数の場合について考える。

(a) s_i が実数 α_i の場合

$\alpha_i < 0$ であれば、 $e^{s_i t} = e^{\alpha_i t}$ は時間の経過とともに収束する。逆に、 $\alpha_i > 0$ の場合、 $e^{s_i t} = e^{\alpha_i t}$ は時間の経過とともに増大する。

(b) s_i が複素数 $\alpha_i + j\omega$ の場合

$\alpha_i < 0$ であれば $e^{s_i t}$ は時間の経過とともに収束し、 $\alpha_i > 0$ の場合には時間の経過とともに増大する。

すなわち、応答が時間とともに 0 に収束する(安定な系である)ためには、伝達関数の極のすべてが s の複素平面の左半面に存在する必要がある。