

(3)微分方程式解法の例

(a) $\frac{dy}{dt} = ky$ 初期条件は $y(0) = a$

$$sY(s) - a - kY(s) = 0 \text{ より } Y(s) = \frac{a}{s-k}$$

これをラプラス逆変換して、 $y = ae^{kt}$

(b) $\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}$ 初期条件は $y(0) = 1$

$$sY(s) - 1 + 2Y(s) = \frac{1}{s+1} \text{ より } Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

これをラプラス逆変換して、 $y = e^{-t}$

(c) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \sin t$

関数 $y(t)$ のラプラス変換を $Y(s)$ 、 $t=0$ における関数とその 1 階微分をそれぞれ $y(0)$ 、 $y'(0)$ とすると、

$$L\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - y(0)s - y'(0)$$

$$L[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

であるから、微分方程式のラプラス変換は次のようになる。

$$s^2Y(s) - y(0)s - y'(0) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

この式を整理すると

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} + \frac{y(0)s + y'(0)}{s^2 + 4}$$

ここで、 $\frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$ を部分分数に展開すると、次の式をえる。

$$\frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 4} \right)$$

$L^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right] = \sin \omega t$ 、 $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right] = \cos \omega t$ であるから、ラプラス逆変換は次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{3} \left(\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + y(0) \cos 2t + \frac{y'(0)}{2} \sin 2t \\ &= \frac{1}{3} \sin t + \frac{1}{2} \left(y'(0) - \frac{1}{3} \right) \sin 2t + y(0) \cos 2t \end{aligned}$$