演習問題　(水本: 2007.7.5)

11.ラプラス変換の基礎

【演習問題 11-1】

関数 $f(t)$ のラプラス変換が $L[f(t)] = F(s)$ であるとき、

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

が成り立つことを示せ。

【演習問題 11-2】

次の関数のラプラス変換を求めよ。

(1) $f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \sin \omega_0 t & (0 \le t) \end{cases}$

(2) $f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ te^{at} & (0 \le t) \end{cases}$

(3) $f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t \sin \omega_0 t & (0 \le t) \end{cases}$

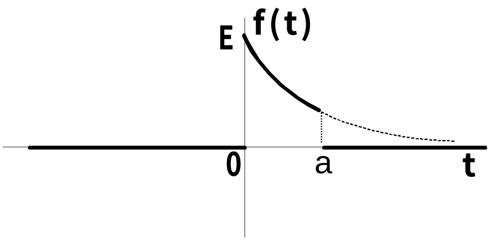
(4) $f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{at} t^2 \sin \omega_0 t & (0 \le t) \end{cases}$

【演習問題 11-3】

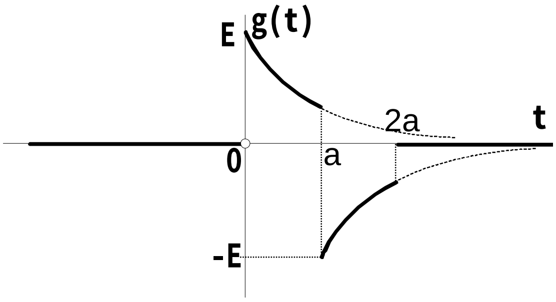
図 11-1(a)、(b)で表される $f(t), g(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ。

(a) $f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0, a \le t) \\ E \exp(-bt) & (0 \le t < a) \end{cases}$

(b) $g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0, 2a \le t) \\ E \exp(-bt) & (0 \le t < a) \\ -E \exp(-b(t-a)) & (a \le t < 2a) \end{cases}$



(a)



(b)

図 11-1

【演習問題 11-4】

次の関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ に対して畳み込み関数 $f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ を求め、そのラプラス変換について $L[f_1 * f_2] = L[f_1]L[f_2]$ が成り立つことを示せ。

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \cos t & (0 \leq t) \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \sin t & (0 \leq t) \end{cases}$$

【演習問題 11-5】

次のラプラス変換された分数 $F(s)$ を部分分数展開し、そのラプラス逆変換を求めよ。

(1) $F(s) = \dfrac{s-2}{s^2 - 4s + 3}$

(2) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

(3) $F(s) = \dfrac{s}{(s-1)^3}$

(4) $F(s) = \dfrac{s^2}{(s-1)^3}$

(5) $F(s) = \dfrac{s^2}{(s+1)(s-1)^2}$

(6) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 4s + 5}$

演習問題の解答

【演習問題 11-1】

関数 $f(t)$ のラプラス変換の定義 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ で、両辺を s で微分すると

$$\frac{dF(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(t)\frac{de^{-st}}{ds}dt=\int_0^\infty(-t)f(t)e^{-st}dt$$

したがって

$$L[tf(t)]=-\frac{dF(s)}{ds}$$

同様に

$$\frac{d^nF(s)}{ds^n}=\int_0^\infty f(t)\frac{d^ne^{-st}}{ds^n}dt=\int_0^\infty(-t)^n f(t)e^{-st}dt$$

より

$$L[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

【演習問題 11-2】

(1)

$$F(s)=\int_0^\infty \sin\omega_0 te^{-st}dt=\int_0^\infty\frac{e^{j\omega_0t}-e^{-j\omega_0t}}{2j}e^{-st}dt=\frac{1}{2j}\left[\frac{e^{(-s+j\omega_0)t}}{-s+j\omega_0}-\frac{e^{(-s-j\omega_0)t}}{-s-j\omega_0}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega_0}-\frac{1}{s+j\omega_0}\right)=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}$$

(2) $g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ t & (0\le t)\end{cases}$ のラプラス変換は

$$G(s)=\int_0^\infty te^{-st}dt=\left[\frac{te^{-st}}{-s}\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty=\frac{1}{s^2}$$

であるから、ラプラス変換の性質(3) $L[\exp(-at)f(t)]=F(s+a)$ を用いて次のように求まる。

$$F(s)=L[\exp(at)t]=G(s-a)=\frac{1}{(s-a)^2}$$

(3) $L[\sin\omega_0t]=\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}$ であり、$L[tf(t)]=-\dfrac{d}{ds}F(s)$ であるから

$$L[t\sin\omega_0t]=-\frac{d}{ds}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}=\frac{2s\omega_0}{(s^2+\omega_0{}^2)^2}$$

(4) $L[\sin\omega_0 t] = \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}$ と $L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$ から

$$L[e^{at}\sin\omega_0 t] = \frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0{}^2}$$

さらに、上式 $L[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$ の関係を用いると

$$L[t^2 e^{at}\sin\omega_0 t] = \frac{d^2}{ds^2}\frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0{}^2} = \frac{d}{ds}\frac{-2(s-a)\omega_0}{\left((s-a)^2+\omega_0{}^2\right)^2}$$

$$= \frac{-2\omega_0\left((s-a)^2+\omega_0{}^2\right)^2 + 2(s-a)\omega_0\times 4(s-a)\left((s-a)^2+\omega_0{}^2\right)}{\left((s-a)^2+\omega_0{}^2\right)^4}$$

$$= \frac{-2\omega_0\left((s-a)^2+\omega_0{}^2\right)+8(s-a)^2\omega_0}{\left((s-a)^2+\omega_0{}^2\right)^3} = \frac{6(s-a)^2\omega_0 - 2\omega_0{}^3}{\left((s-a)^2+\omega_0{}^2\right)^3}$$

【演習問題 11-3】

(a) $f(t) = \begin{cases} 0 & (t<0, a\le t) \\ E\exp(-bt) & (0\le t<a) \end{cases}$ は、次の 2 つの関数の重ね合わせで表される。

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ E\exp(-bt) & (0\le t) \end{cases} - f_2(t) = \begin{cases} 0 & (t<a) \\ Ee^{-ba}\exp(-b(t-a)) & (a\le t) \end{cases}$$

また $\begin{cases} 0 & (t<0) \\ \exp(-\alpha t) & (0\le t) \end{cases}$ のラプラス変換が $\dfrac{1}{s+\alpha}$ であるから、$L[f_1(t)] = \dfrac{E}{s+b}$、$L[f_2(t)] = \dfrac{Ee^{-ab}}{s+b}e^{-as}$

（$L[f(t-\tau)] = \exp(-s\tau)L[f(t)]$を用いる）

したがって、$L[f(t)] = \dfrac{E}{s+b} - \dfrac{Ee^{-ab}}{s+b}e^{-as} = \dfrac{E\left(1-e^{-a(s+b)}\right)}{s+b}$

(b) $g(t) = \begin{cases} 0 & (t<0, 2a\le t) \\ E\exp(-bt) & (0\le t<a) \\ -E\exp(-b(t-a)) & (a\le t<2a) \end{cases} = f(t) + f(t-a)$ であるから、(a)の結果を用いて、

$$L[g(t)] = \frac{E\left(1-e^{-a(s+b)}\right)}{s+b} - \frac{E\left(1-e^{-a(s+b)}\right)}{s+b}e^{-as} = \frac{E\left(1-e^{-a(s+b)}\right)\left(1-e^{-as}\right)}{s+b}$$

【演習問題 11-4】

t<0 で関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ がいずれも値が 0 であることに注意して畳み込み関数

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$$

を求める。

$$f_1 * f_2 = \int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau) d\tau$$
$$= \int_0^t \left(\sin t \cos^2\tau - \cos t \sin\tau \cos\tau\right) d\tau$$
$$= \int_0^t \left(\sin t \frac{1+\cos 2\tau}{2} - \frac{1}{2}\cos t \sin 2\tau\right) d\tau$$
$$= \sin t \left[\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{4}\sin 2\tau\right]_0^t - \frac{1}{2}\cos t \left[-\frac{1}{2}\cos 2\tau\right]_0^t$$
$$= \sin t \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + \frac{1}{4}\cos t \cos 2t - \frac{1}{4}\cos t$$
$$= \frac{1}{2}t \sin t + \frac{1}{4}\cos(2t-t) - \frac{1}{4}\cos t$$
$$= \frac{1}{2}t \sin t$$

さらに、$f_1 * f_2 = \frac{1}{2}t\sin t$ のラプラス変換は$L[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$ と $L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$ を用いると、次のように求まる。

$$L[f_1 * f_2] = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

一方、$L[f_1] = L[\cos t] = \frac{s}{s^2+1}$、$L[f_2] = L[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$ であるから

$$L[f_1]L[f_2] = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

となり、確かに$L[f_1 * f_2] = L[f_1]L[f_2]$が成り立つ。

【演習問題 11-5】

(1) $F(s) = \frac{s-2}{s^2-4s+3} = \frac{s-2}{(s-1)(s-3)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s-3}$

$a = F(s)(s-1)\big|_{s=1} = \frac{1}{2}$、$b = F(s)(s-3)\big|_{s=3} = \frac{1}{2}$ であるから、$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-3}\right)$

逆変換は、$f(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{3t}\right)$

(2) $F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} + \frac{c}{s+3}$

$a = F(s)(s+1)\big|_{s=-1} = -\frac{1}{2}$、$b = F(s)(s+2)\big|_{s=-2} = 2$、$c = F(s)(s+3)\big|_{s=-3} = -\frac{3}{2}$ であるから、

$F(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+3}$。逆変換は、$f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t}$

(3) $s=1$ は 3 重根であるから $F(s)=\dfrac{s}{(s-1)^3}=\dfrac{a}{s-1}+\dfrac{b}{(s-1)^2}+\dfrac{c}{(s-1)^3}$

$F(s)(s-1)^3=s$ であるから、$c=F(s)(s-1)^3\Big|_{s=1}=1$、$b=\dfrac{1}{(3-2)!}\dfrac{d}{ds}F(s)(s-1)^3\Big|_{s=1}=1$、

$a=\dfrac{1}{(3-1)!}\dfrac{d^2}{ds^2}F(s)(s-1)^3\Big|_{s=1}=0$ となる。したがって、$F(s)=\dfrac{s}{(s-1)^3}=\dfrac{1}{(s-1)^2}+\dfrac{1}{(s-1)^3}$

逆変換は、 $f(t)=te^t+\dfrac{t^2}{2}e^t$

(4) $F(s)=\dfrac{s^2}{(s-1)^3}=\dfrac{a}{s-1}+\dfrac{b}{(s-1)^2}+\dfrac{c}{(s-1)^3}$

$F(s)(s-1)^3=s^2$ であるから、$c=F(s)(s-1)^3\Big|_{s=1}=1$、$b=\dfrac{1}{(3-2)!}\dfrac{d}{ds}F(s)(s-1)^3\Big|_{s=1}=2$、

$a=\dfrac{1}{(3-1)!}\dfrac{d^2}{ds^2}F(s)(s-1)^3\Big|_{s=1}=1$ となる。したがって、$F(s)=\dfrac{s}{(s-1)^3}=\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{2}{(s-1)^2}+\dfrac{1}{(s-1)^3}$

逆変換は、 $f(t)=e^t+2te^t+\dfrac{t^2}{2}e^t$

(5) $F(s)=\dfrac{s^2}{(s+1)(s-1)^2}=\dfrac{a}{s-1}+\dfrac{b}{(s-1)^2}+\dfrac{c}{s+1}$

$c=F(s)(s+1)\Big|_{s=-1}=\dfrac{1}{4}$、$b=F(s)(s-1)^2\Big|_{s=1}=\dfrac{s^2}{s+1}\Bigg|_{s=1}=\dfrac{1}{2}$、

$a=\dfrac{1}{(2-1)!}\dfrac{d}{ds}F(s)(s-1)^2\Big|_{s=1}=\dfrac{2s(s+1)-s^2}{(s+1)^2}\Bigg|_{s=1}=\dfrac{3}{4}$

したがって、$F(s)=\dfrac{s^2}{(s+1)(s-1)^2}=\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(s-1)^2}+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s+1}$

逆変換は、 $f(t)=\dfrac{3}{4}e^t+\dfrac{1}{2}te^t+\dfrac{1}{4}e^{-t}$

(6) $F(s)=\dfrac{s}{s^2+4s+5}=\dfrac{s}{(s+2)^2+1}=\dfrac{s+2}{(s+2)^2+1}-\dfrac{2}{(s+2)^2+1}$

$L\left[e^{-at}\cos\omega_0 t\right]=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0{}^2}$、$L\left[e^{-at}\sin\omega_0 t\right]=\dfrac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0{}^2}$ を用いると、

逆変換は、 $f(t)=e^{-2t}\cos t-2e^{-2t}\sin t$