

7. シャノンの標本化定理

「周波数帯域がある値以下に制限されている波形は、その波形を一定時間間隔で標本化(サンプリング)して得られる標本値だけで再現できる。ここで、周波数帯域が W [Hz] 以下に制限されていれば、 $\frac{1}{2W}$ [sec] ごとに標本化すれば(サンプリング周波数 $2W$ [Hz])、この離散的な信号だけから元のアナログ波形が再現できる。」

[証明]

元の信号を $f(t)$ 、 $\frac{1}{2W}$ [sec] ごとのサンプリング時刻を $t_i = \frac{i}{2W}$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) とする。また、 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ とする。

(i) 周波数帯域が W [Hz] 以下に制限されているので、 $|\omega| > 2\pi W$ で $F(\omega) = 0$ である。すなわち、 $F(\omega)$ を $-2\pi W \leq \omega \leq 2\pi W$ でのみ定義された周期 $4\pi W$ の関数と考え、フーリエ級数で展開する。

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{4\pi W} \omega\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) \quad (7.1)$$

$$\text{ここで、} c_n = \frac{1}{4\pi W} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) \exp\left(-j \frac{n}{2W} \omega\right) d\omega \quad (7.2)$$

(ii) $F(\omega)$ のフーリエ逆変換から、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) \right) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-2\pi W}^{2\pi W} \exp\left(j \frac{n}{2W} \omega\right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2c_n \int_0^{2\pi W} \cos\left(\frac{n}{2W} + t\right) \omega d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2W} + t\right) \omega}{\frac{n}{2W} + t} \right]_0^{2\pi W} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin 2\pi W \left(\frac{n}{2W} + t\right)}{\frac{n}{2W} + t} = 2W \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin 2\pi W \left(t + \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W \left(t + \frac{n}{2W}\right)} \end{aligned} \quad (7.3)$$

n を書き直すと次式を得る。

$$f(t) = 2W \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} \frac{\sin 2\pi W \left(t - \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W \left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (7.4)$$

一方、フーリエ逆変換の式(7.3)で $t_n = \frac{n}{2W}$ とすると、

$$f(t_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{j\omega \frac{n}{2W}} d\omega$$

式(7.2)と見比べれば、 $f(t_n) = 2Wc_{-n}$ となる。

すなわち、式(7.4)は次のように書き改めることができる。

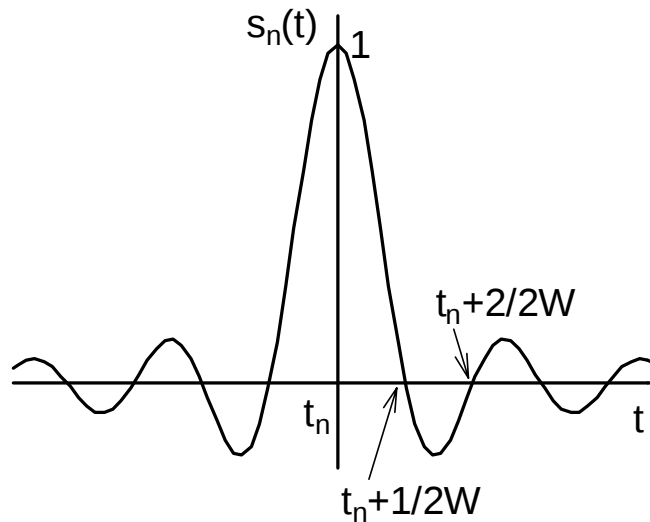
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \frac{\sin 2\pi W \left(t - \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W \left(t - \frac{n}{2W} \right)} \quad (7.5)$$

すなわち、式(7.5)から標本点 $t_n = n/2W$ における標本値 $f(t_n)$ がわかれば、元波形 $f(t)$ は標本化関数(sinc

関数) $s_n(t) = \frac{\sin 2\pi W \left(t - \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W \left(t - \frac{n}{2W} \right)}$ と標本値 $f(t_n)$ から再現することができる。

なお、標本化関数 $s_n(t) = \frac{\sin 2\pi W \left(t - \frac{n}{2W} \right)}{2\pi W \left(t - \frac{n}{2W} \right)}$ は次の特徴をもつ関数である。

- ・ $s_0(t) = \frac{\sin 2\pi W t}{2\pi W t}$ を $t_n = n/2W$ だけ平行移動した関数である。
- ・ $t_n = n/2W$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) で $s_0(t_n) = \frac{\sin n\pi}{n\pi} = 0$
- ・ $s_0(0) = 1$



標本化関数

8. 離散フーリエ変換

8.1 周期信号のサンプリング

連続的な周期信号 $f(t)$ を、サンプリングした離散的な周期信号 $f_s(t)$ で置き換える。すなわち、サンプリングの周期を T_s 、原信号 $f(t)$ の周期を NT_s とすると、サンプリングした信号 $f_s(t)$ は次の式で表される。

$$f_s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t)(T_s \delta(t - nT_s)) \quad (8.1)$$

T_s がかけてあるのは、サンプリングした信号 $f_s(t)$ をサンプリング間隔 T_s で時間積分した値が、原信号 $f(t)$ の時間積分値とよい近似を与えるようにするためである。

$f_s(t)$ を NT_s の周期関数とみなして複素フーリエ級数で展開すると、そのフーリエ係数は次のようになる。

$$c_k = \frac{1}{NT_s} \int_{\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f(t)(T_s \delta(t - nT_s)) \right) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8.2)$$

積分範囲は原信号の任意の 1 周期 NT_s でよいが、 δ 関数が積分の上限、下限にかからないように微小量 ε だけ移動させている。式(8.2)の積分を実行すると、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\varepsilon}^{NT_s - \varepsilon} f(t)(T_s \delta(t - nT_s)) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) dt \\ &= \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} T_s f(nT_s) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} nT_s\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) \end{aligned} \quad (8.3)$$

このフーリエ係数で、 k を $k + N$ と置き換えると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} c_{k+N} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} (k+N)n\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \left(\frac{2\pi}{N} kn + 2n\pi\right)\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) = c_k \end{aligned}$$

したがって、式(8.3)のフーリエ係数は N の周期性をもつ。

連続周期信号のスペクトルは離散スペクトルであった。上述のことは、離散周期信号 $f_s(t)$ のスペクトルは離散周期スペクトルになるということを意味する。フーリエ級数によって元の信号を得るためには、周期スペクトルなので $k = 0$ から $k = N - 1$ まで加算すればよい(同じスペクトルの繰り返しであるから無限に加算したら結果は発散する)。すなわち、

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-jk \frac{2\pi}{NT_s} nT_s\right) \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} t\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} (t - nT_s)\right) \tag{8.4}
\end{aligned}$$

すなわち、サンプリング時刻における値 $f(nT_s)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) から任意の時刻における関数値 $f(t)$ が計算できる。なお、 $t = mT_s$ なるサンプリング時刻における $f(t)$ を計算すると、確かに $f(mT_s)$ に一致することが次のようにして確かめられる。

$$\begin{aligned}
f(mT_s) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{NT_s} (mT_s - nT_s)\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jk \frac{2\pi}{N} (m - n)\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) N \delta_{nm} \\
&= f(mT_s) \tag{8.5}
\end{aligned}$$

式(8.4)で $t = nT_s$ とおくと、次の式を得る。

$$f(nT_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} n\right) \right) \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right) \tag{8.6}$$

ここで、あらためて $f_n = f(nT_s)$ として、

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N} n\right) \text{-----離散フーリエ変換} \tag{8.7}$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \exp\left(jn \frac{2\pi}{N} k\right) \text{----離散フーリエ逆変換} \tag{8.8}$$

とよぶ。

8.2 離散フーリエ変換の定義

離散フーリエ変換は次のようにして定義される。

複素平面上の単位円を N 分割した点は、次の変数 W で定義される。

$$W = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right) \quad (8.9)$$

この W を用いて、離散フーリエ変換、離散フーリエ逆変換は、それぞれ次のように定義される。

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{kn} \quad (8.10)$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W^{-nk} \quad (8.11)$$

信号の値、スペクトルの値がいずれも N 個の離散的なデータで与えられ、このままデジタル処理できるフーリエ級数展開である。--->対称性を用いて演算量を低減。高速フーリエ変換(FFT)に発展