

5. フーリエ変換の性質

5.1 代表的な関数のフーリエ変換

(1) δ 関数

δ 関数は次の性質をもつ関数として定義される。

$$(i) \delta(t) = \begin{cases} \infty & (t = 0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \quad (5.1)$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (5.2)$$

(iii) 任意の関数 $f(t)$ に対して次の関係が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (5.3)$$

$\delta(-t) = \delta(t)$ であるから δ 関数は偶関数である。

δ 関数のフーリエ変換は次のように求まる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^0 = 1 \quad (5.4)$$

すなわち、 δ 関数のスペクトルは $-\infty$ から ∞ に広がり、かつ振幅は ω によらず一定である。

幅 $2a$ 、振幅 E の単一矩形パルスで $2aE = 1$ を保ったまま $a \rightarrow 0$ とした極限が δ 関数と一致する。単一矩形パルス(幅 $2a$ 、振幅 E)のフーリエ変換は

$$F(\omega) = 2aE \frac{\sin a\omega}{a\omega} \quad (5.5)$$

で与えられるので、 $2aE = 1$ で $a \rightarrow 0$ とすると $\frac{\sin a\omega}{a\omega} \rightarrow 1$ であるから $F(\omega) = 1$ となり、確かに上記の結果と一致する。

一方、 $F(\omega) = 1$ のフーリエ逆変換は δ 関数に一致するはずであるので、

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (5.6)$$

と表現される。

(2) 直流 $f(t) = E$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \delta(\omega) \quad (5.7)$$

5.2 フーリエ変換の性質

関数 $f(t)$ をフーリエ変換により $F(\omega)$ を求めることを、 $F(\omega) = F[f(t)]$ と書くことにする。フーリエ変換では次の関係(性質)が成り立つ。

(1) 線形性

$$F[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F[f_1(t)] + \beta F[f_2(t)] \quad (5.8)$$

(2) 原関数の移動

$$F[f(t - \tau)] = \exp(-j\omega\tau) F[f(t)] \quad (5.9)$$

(3) 像関数の移動

$$F[\exp(-jkt)f(t)] = F(\omega + k) \quad (5.10)$$

(4)時間軸の拡大

$$F[f(At)] = \frac{1}{A} F\left(\frac{\omega}{A}\right) \quad (5.11)$$

(5)時間微分

$$F[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F[f(t)] \quad (5.12)$$

(6)対称性

$$F[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \quad (5.13)$$

5.3 畳み込み関数とそのフーリエ変換

次の積分演算を Convolution(畳み込み)という。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (5.14)$$

$f(t)$ を二つの関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ の畳み込み関数と呼び、 $f = f_1 * f_2$ で表す。

畳み込み関数のフーリエ変換は、次のように二つの関数のフーリエ変換の積に等しい。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t') e^{-j\omega(t'+\tau)} dt' \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t') e^{-j\omega t'} dt' \end{aligned}$$

すなわち、

$$F[f_1 * f_2] = F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (5.15)$$

5.4 Parseval の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (5.16)$$

[証明]

$$F[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy$$

において、 $\omega=0$ とおくと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt$$

ここで、 $f_2(t) = g(t)^*$ とすると、

$$F_2(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j(-\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^* e^{j\omega t} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \right)^* = G(\omega)^* \quad (5.17)$$

したがって、次の式が成り立つ

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega)^* d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t)^* dt \quad (5.18)$$

ここで、特に $g(t) = f(t)$ とすれば、次の Parseval の等式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

——Parseval の等式の物理的な意味——

$f(t)$ を 1Ω の抵抗の両端の電圧とすれば、 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ は 1Ω の抵抗が消費する全電力を表す。

これが $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(\omega)|^2}{2\pi} d\omega$ に等しいということは、 $\frac{|F(\omega)|^2}{2\pi}$ が ω におけるスペクトル成分に含まれるエネルギー密度を表しているということを意味する。

5.5 時間波形と周波数スペクトルの双対性

時間関数 $f(t)$ をフーリエ変換するとスペクトル密度 $F(\omega)$ が得られる。すなわち、 $F[f(t)] = F(\omega)$ 、

$f(t) = F^{-1}[F(\omega)]$ であるから、時間領域と周波数領域の間には双対関係が存在する。

双対関係の例として、次のことがあげられる。

- ・時間軸上の 1 点でのみ非零の値をもつ関数は δ 関数であり、その周波数スペクトルは $-\infty$ から ∞ の周波数軸上で一定値 1 をもつ。
- ・一つの周波数成分だけをもつ関数は正弦関数もしくは直流であり、その周波数スペクトルは $\delta(\omega)$ である。このような関数は、時間軸上では $-\infty$ から ∞ で一定の振幅をもつ。

5.6 その他

フーリエ変換の結果に負の周波数 ω が含まれることにとまどいを感じるかも知れない。 $f(t)$ が実関数の場合には、式(4.2)から次の関係が成り立つ。

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt = F(\omega)^* \quad (5.19)$$

このとき、フーリエ逆変換で $F(\omega)$ から $f(t)$ を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 F(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(-\omega) e^{-j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)^* + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[F(\omega) e^{j\omega t}] d\omega
 \end{aligned}$$

すなわち、実関数 $f(t)$ を得るためには、正の周波数の正弦波 $e^{j\omega t}$ 成分だけでよいことがわかる。