4.フーリエ変換の基礎

4.1 フーリエ変換の定義

周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数の複素表現を考える。展開係数 $c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}\tau\right)d\tau$ を式(3.7)の級数表現に代入すると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}\tau\right)d\tau\right)\exp(jn\frac{2\pi}{T}t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\exp\left(jn\frac{2\pi}{T}(t-\tau)\right)d\tau
\end{aligned}
$$

ここで $\omega_n = n\omega = n\frac{2\pi}{T}$ とすると、$\frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2n\pi} = \frac{n\omega}{2n\pi} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(n+1)\omega - n\omega}{2\pi} = \frac{\omega_{n+1}-\omega_n}{2\pi}$ となる。

すなわち、

$$
f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\omega_{n+1}-\omega_n)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\exp(j\omega_n(t-\tau))d\tau \qquad (4.1)
$$

ここで、$T \to \infty$（周期∞）の極限、すなわち孤立波(非周期関数)を考えると $\omega_{n+1}-\omega_n = d\omega \to 0$ となるから、ω_n は離散的な変数から連続変数 ω になる。また、それにつれて $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ は連続変数 ω に関する積分で置き換えられ、次のよう書き換えられる。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(j\omega(t-\tau))d\tau d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau e^{j\omega t}d\omega
\end{aligned}
$$

すなわち、

$$
F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (4.2)
$$

とおけば、関数 $f(t)$ は次のように表される。

$$
f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (4.3)
$$

式(4.2)で与えられる $F(\omega)$ を $f(t)$ のフーリエ変換とよぶ。また、式(4.3)はフーリエ逆変換とよぶ。

式(4.3)の意味を周波数 ω の正弦波 $e^{j\omega t}$ 成分を振幅 $F(\omega)d\omega$ だけ含むと考えると、全ての ω についてこれを加算した結果が関数 $f(t)$ になるということを、式(4.3)が表していると解釈することができる。その意味で、$F(\omega)$ を $f(t)$ のスペクトル密度と呼ぶこともある。

[注意]

フーリエ変換の定義には次のようなものもある。

$$
F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt
$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

4.2 フーリエ積分

$f(t)$が実関数であるとして$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$を用いると、式(4.2)の$F(\omega)$は次のようになる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = A(\omega) - jB(\omega) \qquad \text{(4.4a)}$$

$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$ ：フーリエ余弦変換（$A(-\omega) = A(\omega)$） (4.4b)

$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$ ：：フーリエ正弦変換（$B(-\omega) = -B(\omega)$）(4.4c)

これを用いると、フーリエ逆変換は次のようになる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(A(\omega) - jB(\omega)\right)\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right) d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\right) d\omega + \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(A(\omega)\sin\omega t - B(\omega)\cos\omega t\right) d\omega$$

ここで、第二項の被積分関数はωについて奇関数であるから、第二項の積分は零となり、次式を得る。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\right) d\omega$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left(A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\right) d\omega$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau \cos\omega t + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau \sin\omega t\right) d\omega$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau) d\tau\right) d\omega \qquad \text{(4.5)}$$

------- $f(t)$のフーリエ積分

4.3 フーリエ変換の存在

$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$が存在するか否かについて、次の定理がある。

【定理】

$f(t)$の絶対積分が収束、すなわち$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$の場合、$F(\omega)$が存在する。

$F(\omega)$は孤立波のスペクトル密度を与え、連続関数である。これに対して、c_nは周期波のスペクトルを与え、離散値をとる。$F(\omega)$を用いてフーリエ逆変換によって$f(t)$を計算すると、$f(t)$が連続な領域では元の関数$f(t)$と一致し、$f(t)$の飛びのある点では$\frac{1}{2}\left(f(t+0) + f(t-0)\right)$となる。

[注意]

飛びのある点におけるフーリエ逆変換の結果については、フーリエ級数の飛びのある点におけるふるまいと同様である。