

## 3. フーリエ級数と線形システム

## 3.1 フーリエ級数の複素表現

オイラーの公式

$$\begin{aligned} e^{jx} &= \cos x + j \sin x \\ e^{-jx} &= \cos x - j \sin x \end{aligned} \quad (3.1)$$

を用いて  $\cos x$ 、 $\sin x$  を  $\exp$  関数で表す。(電気工学の慣例で、虚数単位は  $\sqrt{-1} = j$ )

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{aligned} \quad (3.2)$$

これを、次のフーリエ級数に代入する。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\exp(jn \frac{2\pi}{T} t) + \exp(-jn \frac{2\pi}{T} t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\exp(jn \frac{2\pi}{T} t) - \exp(-jn \frac{2\pi}{T} t)}{2j} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right) \exp(jn \frac{2\pi}{T} t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right) \exp(-jn \frac{2\pi}{T} t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} \exp(jn \frac{2\pi}{T} t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + jb_n}{2} \exp(-jn \frac{2\pi}{T} t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで、 $a_n$ 、 $b_n$  の表現式で  $n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) を  $-n$  とおくと、次のようになる。

$$a_{-n} = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(-n \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt = a_n \quad (3.4a)$$

$$b_{-n} = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(-n \frac{2\pi}{T} t\right) dt = -\frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt = -b_n \quad (3.4b)$$

したがって、

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (3.5)$$

とおくと、

$$c_{-n} = \frac{a_{-n} - jb_{-n}}{2} = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad (3.6)$$

となる。これを用いると、式(3.3)の第3項は次のように変形することができる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + jb_n}{2} \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \exp\left(j(-n) \frac{2\pi}{T} t\right) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right)$$

また、 $c_0 = \frac{a_0 - jb_0}{2} = \frac{a_0}{2}$  であるから、式(3.3)は次のようにまとめることができる。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) \quad (3.7)$$

ここで  $c_n$  は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \frac{j}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

この  $c_n$  を用いて関数  $f(t)$  を式(3.7)のように級数展開することをフーリエ級数の複素表現という。

関数  $f(t)$  が実関数の場合、 $a_n$ 、 $b_n$  は全て実数となり、

$$c_n^* = \frac{a_n + jb_n}{2} = c_{-n}$$

であるから、式(3.7)は次のようになる。

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) + c_{-n} \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} t\right) \right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) + \left( c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) \right)^* \right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) \right]
\end{aligned}$$

$\frac{2\pi}{T} = \omega$  とおけば、

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [c_n \exp(jn\omega t)] \quad (3.9)$$