

0.線形システム

線形システム：その動作が、数学的に線形の関数方程式で記述されるシステム。

入力 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ に対する出力が、それぞれ $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ であるとき、 $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ の入力に対する出力が $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ となる系は線形性がある。

A.フーリエ級数 ---> 周期波の展開

- ・線形システムにおいて、出力の求めやすい関数(正弦関数)の和で、入力 1 を表す。
- ・各関数を入力とした場合の応答(出力)を求め、その和をとるともとの入力 1 に対する応答(出力)がわかる。

B.フーリエ変換 ---> 非周期波(孤立波)の周波数分析

C.ラプラス変換 ---> 過渡現象の解析

1.フーリエ(Fourier)級数の基礎

- ・(時間的、空間的に)周期的に変化する現象を数学的に表現 ---> 周期関数
- ・周期関数を簡単な周期関数(正弦関数)の和で表現する ---> フーリエ級数
- ・時間変数 t の関数 $f(t)$ に対して考える。周期を T とすると

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.1)$$

1.1 フーリエ級数展開係数の求め方

$$1, \cos \frac{2\pi}{T}t, \cos 2 \frac{2\pi}{T}t, \dots, \cos n \frac{2\pi}{T}t, \dots \quad (1.2)$$

$$\sin \frac{2\pi}{T}t, \dots, \sin n \frac{2\pi}{T}t, \dots$$

も周期 T の周期関数である。

$f(t)$ を $\cos n \frac{2\pi}{T}t, \dots, \sin n \frac{2\pi}{T}t, \dots$ の関数の和として表現(展開)する。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi}{T}t + a_2 \cos 2 \frac{2\pi}{T}t + \dots + a_n \cos n \frac{2\pi}{T}t + \dots + b_1 \sin \frac{2\pi}{T}t + \dots + b_n \sin n \frac{2\pi}{T}t + \dots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{2\pi}{T}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{2\pi}{T}t \quad (1.3)$$

ここで、展開係数 $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ は、次のようにして求まる。

(1) a_0 : 式(1.3)の両辺に 1 をかけて、1 周期 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ にわたって積分

$n \neq 0$ に対して

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n \frac{2\pi}{T}t dt = \frac{T}{2n\pi} \left[\sin n \frac{2\pi}{T}t \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n \frac{2\pi}{T}t dt = \frac{-T}{2n\pi} \left[\cos n \frac{2\pi}{T}t \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{-T}{2n\pi} \left(\cos n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} - \cos n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} \right) = 0$$

より

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{a_0}{2} T$$

すなわち、

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (1.4)$$

(2) a_n : 式(1.3)の両辺に $\cos m \frac{2\pi}{T} t$ をかけて、1 周期 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ にわたって積分

(2-1) ここで、

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\cos(n+m) \frac{2\pi}{T} t + \cos(n-m) \frac{2\pi}{T} t \right) dt$$

であるから、

(i) $n \neq m$ なら

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{T} t dt &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+m) \frac{2\pi}{T} t}{(n+m) \frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin(n-m) \frac{2\pi}{T} t}{(n-m) \frac{2\pi}{T}} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n+m)\pi}{(n+m) \frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin(n+m)\pi}{(n+m) \frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m) \frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m) \frac{2\pi}{T}} \right) \end{aligned}$$

$$\because \sin(n \pm m)\pi = 0$$

(ii) $n = m$ なら

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{T} t dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 m \frac{2\pi}{T} t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 + \cos 2m \frac{2\pi}{T} t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2m \frac{2\pi}{T} t}{2m \frac{2\pi}{T}} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

(2-2) また、

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sin(n+m) \frac{2\pi}{T} t + \sin(n-m) \frac{2\pi}{T} t \right) dt$$

であり、

(i) $n \neq m$ なら

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{T} t dt &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(n+m) \frac{2\pi}{T} t}{(n+m) \frac{2\pi}{T}} - \frac{\cos(n-m) \frac{2\pi}{T} t}{(n-m) \frac{2\pi}{T}} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(n+m)\pi - \cos(n+m)\pi}{(n+m) \frac{2\pi}{T}} + \frac{\cos(n-m)\pi - \cos(n-m)\pi}{(n-m) \frac{2\pi}{T}} \right) = 0 \end{aligned}$$

(ii) $n = m$ でも

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{T} t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \sin 2m \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 2m \frac{2\pi}{T} t}{2m \frac{2\pi}{T}} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2m\pi - \cos 2m\pi}{2m \frac{2\pi}{T}} \right) = 0$$

すなわち、関数の直交性

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{T} t dt &= \begin{cases} 1 & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{T} t dt &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

を用いると、右辺は $\cos m \frac{2\pi}{T} t$ の項だけが非零で残り、次のように a_m が求まる

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos m \frac{2\pi}{T} t dt &= a_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 m \frac{2\pi}{T} t dt = a_m \frac{T}{2} \\ a_m &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos m \frac{2\pi}{T} t dt \end{aligned} \quad (1.6)$$

(3) b_n : 式(1.3)の両辺に $\sin m \frac{2\pi}{T} t$ をかけて、1 周期 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ にわたって積分

a_n の場合と同様に、次の関数の直交性が成り立つ。

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n \frac{2\pi}{T} t \sin m \frac{2\pi}{T} t dt = \begin{cases} 1 & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (1.7)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin m \frac{2\pi}{T} t dt &= b_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 m \frac{2\pi}{T} t dt = b_m \frac{T}{2} \\ b_m &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin m \frac{2\pi}{T} t dt \end{aligned} \quad (1.8)$$

展開係数 $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ は式(1.4)、(1.6)、(1.8)で求められる。

$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ において $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$ と書くこともできる。

ω_0 : 基本角周波数、 $n\omega_0$: 高調波

[まとめ]

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \quad (1.9.a)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.9.b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.9.c)$$

1.2 フーリエ級数展開の例

(1)全波整流 $f(t) = E|\sin \omega t|$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 (-E \sin \omega t) \cos n \omega t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin \omega t \cos n \omega t dt \right) \\
&= \frac{4E}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} (\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t) dt \\
&= \frac{2E}{T} \left[-\frac{\cos(n+1)\omega t}{(n+1)\omega} + \frac{\cos(n-1)\omega t}{(n-1)\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{2E}{T} \left(-\frac{\cos(n+1)\pi - 1}{(n+1)\omega} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{(n-1)\omega} \right) \\
&= \frac{2E}{T} \left(-\frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n+1)\omega} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{(n-1)\omega} \right) \\
&= \frac{2E}{T} \left(\frac{(-1)^n + 1}{(n+1)\omega} - \frac{(-1)^n + 1}{(n-1)\omega} \right) \\
&= \frac{2E}{T} ((-1)^n + 1) \left(\frac{1}{(n+1)\omega} - \frac{1}{(n-1)\omega} \right) \\
&= \frac{2E}{T} ((-1)^n + 1) \left(\frac{-2}{(n^2 - 1)\omega} \right) \\
&= \frac{2E}{\pi} \frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2}
\end{aligned}$$

したがって、 n が偶数の場合 $a_n = a_{2m} = \frac{4E}{\pi} \frac{1}{1 - 4m^2}$ 、 n が奇数の場合 $a_n = 0$

同様に、

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 (-E \sin \omega t) \sin n \omega t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin \omega t \sin n \omega t dt \right) \\
&= \frac{2E}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 (\sin \omega t') \sin n \omega t' dt' + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \sin n \omega t dt \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

したがって、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} \cos 2m \omega t = \frac{2E}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4E}{\pi} \frac{1}{1 - 4m^2} \cos 2m \omega t = \frac{2E}{\pi} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{1 - 4m^2} \cos 2m \omega t \right)$$

(2)半波整流波形

$f(t) = \frac{1}{2}(E|\sin \omega t| + E \sin \omega t)$ で表すことができるから、

$$f(t) = \frac{E}{\pi} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{1 - 4m^2} \cos 2m \omega t \right) + \frac{E}{2} \sin \omega t = \frac{E}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \omega t + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{1 - 4m^2} \cos 2m \omega t \right)$$

(3)矩形波形

$$f(t) = \begin{cases} -E & \left(-\frac{T}{2} \leq t < 0\right) \\ E & \left(0 \leq t < \frac{T}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 (-E) \cos n\omega t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} E \cos n\omega t dt \right) \\ &= \frac{2E}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 \cos n\omega t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \cos n\omega t dt \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 (-E) \sin n\omega t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin n\omega t dt \right) \\ &= \frac{2E}{T} \left(- \int_{-\frac{T}{2}}^0 \sin n\omega t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t dt \right) \\ &= \frac{4E}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t dt \\ &= \frac{4E}{T} \left[-\frac{\cos n\omega t}{n\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{4E}{T} \left(\frac{-\cos n\pi + 1}{n\omega} \right) \\ &= \frac{4E}{T} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n\omega} \right) \end{aligned}$$

すなわち、 n が偶数の場合 $b_n = b_{2m} = 0$ 、 n が奇数の場合 $b_n = b_{2m-1} = \frac{8E}{Tn\omega} = \frac{4E}{(2m-1)\pi}$

$$f(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin(2m-1)\omega t$$