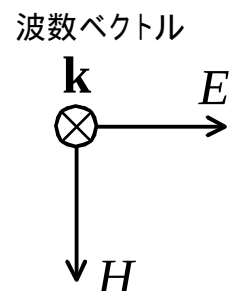


伝送線路

東京工業大学

広川 二郎

伝送線路

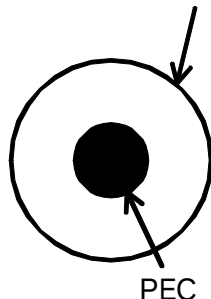


(a) 自由空間

PEC(金属)

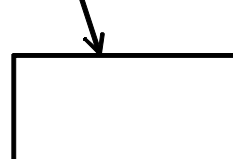
(b) 平行二本線路
(レッヘル線路)

PEC



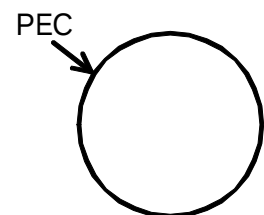
(c) 同軸線路

PEC



(d) 方形導波管

- 伝送線路空間内を(平面)電磁波を伝送
- 構造・・・奥行き方向に一樣
(曲がり, 分岐)
- 分類



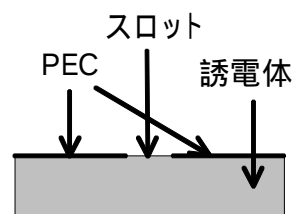
(e) 円形導波管

PEC 誘電体

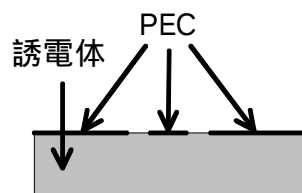


(f) マイクロストリップ線路

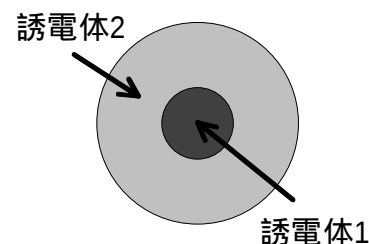
PEC 誘電体

(g) ストリップ線路
(トリプレート線路)

(h) スロット線路



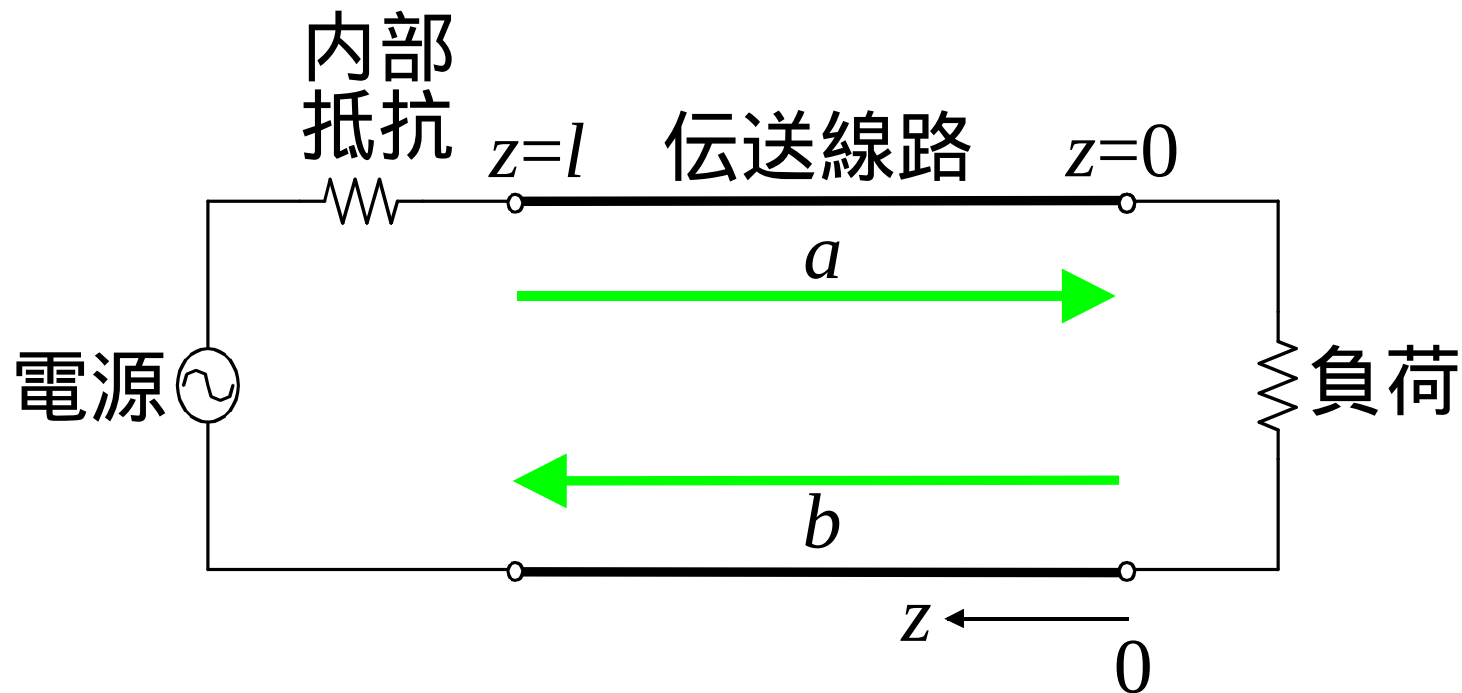
(i) コプレーナガイド



(j) 光ファイバ

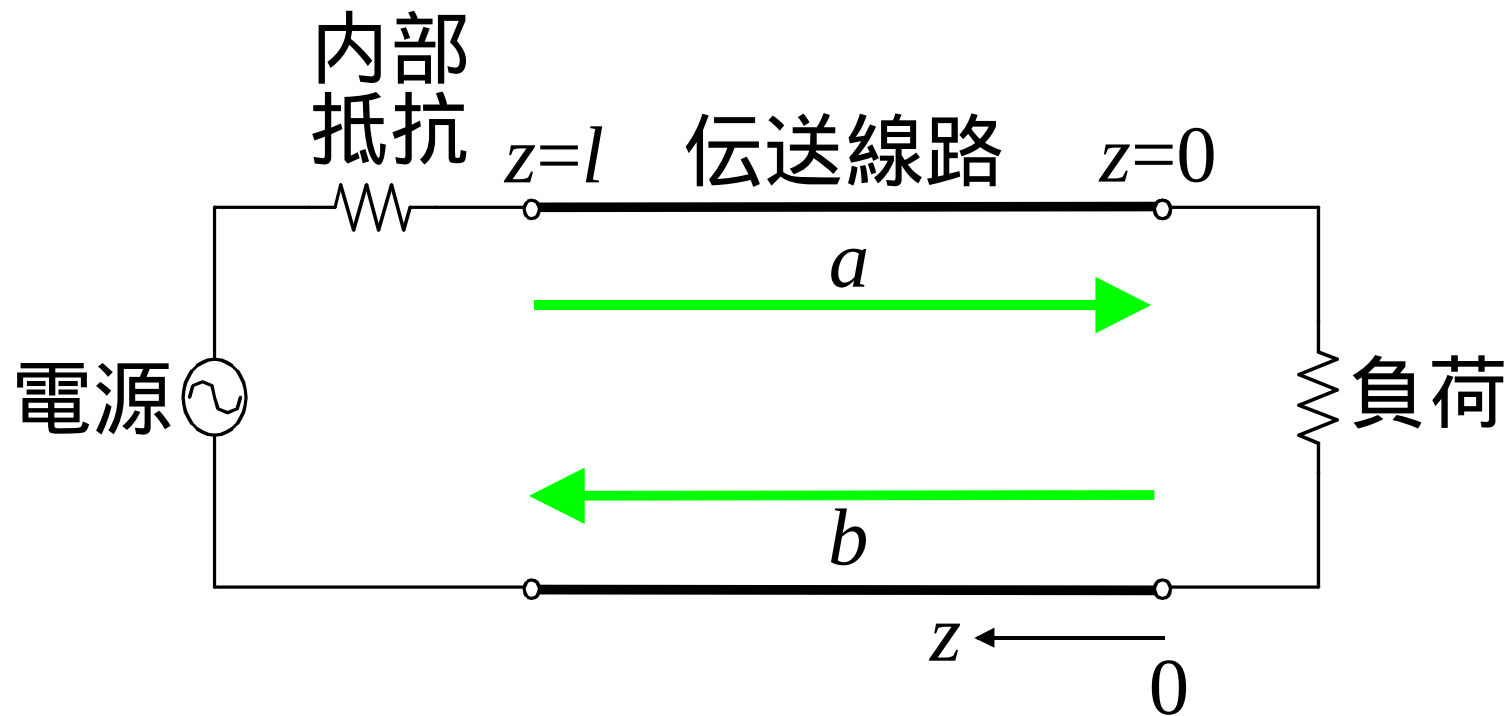
- 2 導体, 1 導体, 誘電体
- 閉鎖, 開放
- 平面, 立体

伝送線路を用いた回路



- 原点・・・負荷の位置, 電源方向を $+z$
- 振幅・・・正弦波(定常), 波高値で定義
- 太線・・・分布定数線路(電圧, 電流が位置で変化)
- 細線・・・電圧, 電流が位置によらず不変

伝送線路を用いた回路



- 線路内 $\cdots -z$ 方向へ入射する(平面)電磁波 a と $+z$ 方向へ反射する(平面)電磁波 b
- a と b の振幅比 $\cdots$ 負荷インピーダンス(=電圧/電流)
- 線路長 l $\cdots$ 電源周波数での(平面)電磁波の波長に対して極端に短くない

波長, 規格化

- 周波数 $f(\text{GHz}) \times (\text{自由空間})\text{波長}\lambda_0(\text{mm})=300$
 $\text{GHz}=10^9\text{Hz}$, $\text{mm}=10^{-3}\text{m}$
 $\text{周波数}(\text{Hz}) \times \text{波長}(\text{m})=3 \times 10^8(\text{m/s}) = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$
 (MKSA単位系に変に拘らない)
- 波長で規格化した(電氣的)長さ(電気長)での動作は同じ。
 例: 周波数3GHz(波長100mm), (物理的)大きさ
 200mm(2波長)と周波数6GHz(波長50mm), (物理的)大
 きさ100mm(2波長)
- 数式... 長さ a には波数 $k_0(=2\pi/\lambda_0)$ をかけて k_0a で扱う
 波動インピーダンス $Z_0(=120\pi = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0})$
 $\mu_0=4\pi \times 10^{-7}(\text{H/m})$, $\epsilon_0=8.854 \times 10^{-12}(\text{F/m})$

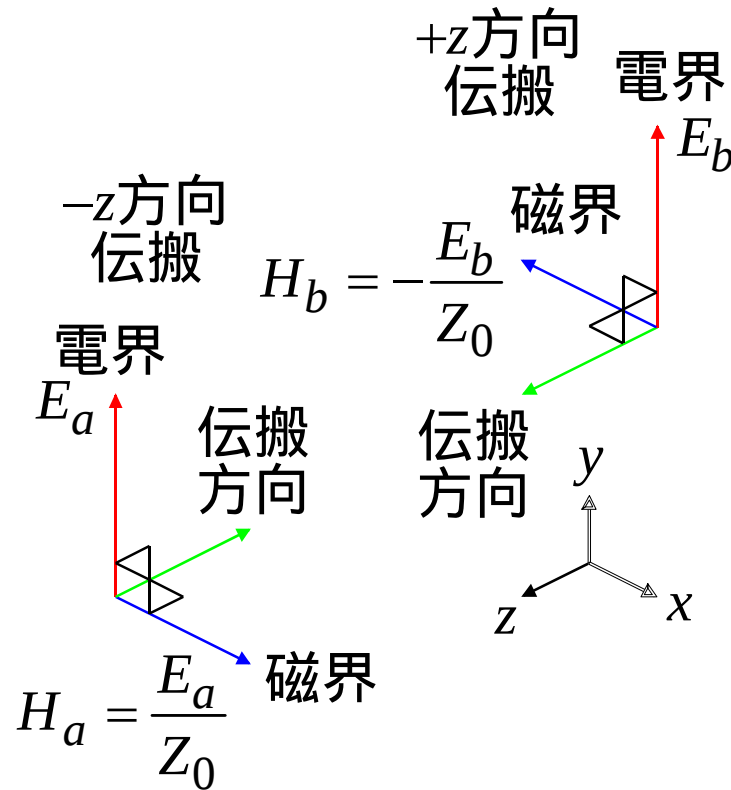
平面電磁波

- 時間的変化... $\exp(+j\omega t) \rightarrow \frac{d}{dt} = +j\omega$
- 場所的変化... $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ (直角座標系)
- (波源なし)Maxwellの方程式($J=0, \sigma=0$)へ代入 $\rightarrow E_z=H_z=0$
TEM波(Transverse ElectroMagnetic Wave, 伝搬方向に電界も磁界も無い)の一種
- 波動方程式(E_y, H_x), ($E_x, -H_y$)が独立に満足

$$\begin{cases} \frac{dE_y}{dz} = -j\omega\mu_0 H_x \\ \frac{dH_x}{dz} = -j\omega\varepsilon_0 E_y \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 E_y = 0 \quad k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$$

波動方程式の解の意味



• 波動方程式の解

$$\begin{cases} E_y = E_a \exp(+jk_0z) + E_b \exp(-jk_0z) \\ H_x = \frac{E_a}{Z_0} \exp(+jk_0z) - \frac{E_b}{Z_0} \exp(-jk_0z) \end{cases}$$

• 伝搬定数(波数) $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

• 波動インピーダンス (実数) $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

• 伝送電力 P (単位面積を通るエネルギー)

$$P_a = \operatorname{Re} \left(\frac{E_a \times H_a^*}{2} \right) = \frac{|E_a|^2}{2Z_0}$$

(分母の2は振幅が波高値のため)

• 伝搬方向・・・電界から磁界に右ねじを回して進む方向

• 第1項・・・-z方向伝搬成分

• 第2項・・・+z方向伝搬成分

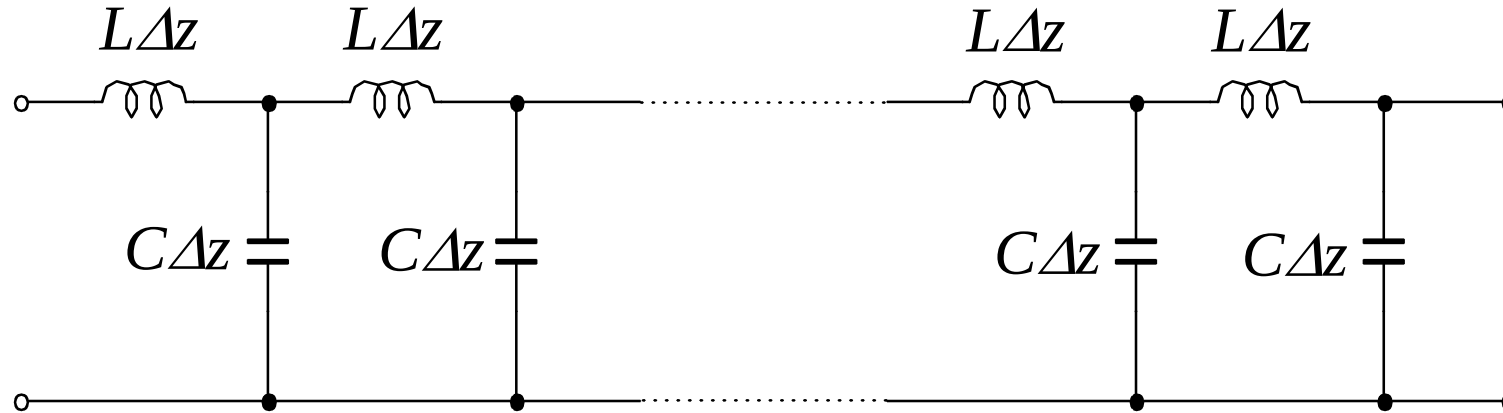
(磁界の-符号に注意)

位相変化量

- 時間的变化 $\cdots \exp(+j\omega t)$
- $+z$ 方向伝搬表現式 $\cdots \exp\{j(\omega t - k_0 z)\}$
 (t, z) と $(t + \Delta t, z + \Delta z)$ で位相が同じ
 $\rightarrow \omega t - k_0 z = \omega(t + \Delta t) - k_0(z + \Delta z) \rightarrow k_0 \Delta z = \omega \Delta t \rightarrow \Delta t > 0$ のとき $\Delta z > 0$
- (位相)速度 $v_p = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_0}$
- $-z$ 方向伝搬表現式 $\cdots \exp\{j(\omega t + k_0 z)\}$
- $+z$ 方向に $\Delta z(>0, \text{絶対値})$ 移動の(物理的)位相変化量
 表現式 $\exp(-jk_0 z)$, (数学的)変位量 $\Delta z(>0) \rightarrow \exp(-jk_0 \Delta z)$
- $-z$ 方向に $\Delta z(>0, \text{絶対値})$ 移動の(物理的)位相変化量
 表現式 $\exp(+jk_0 z)$, (数学的)変位量 $-\Delta z(<0) \rightarrow \exp(-jk_0 \Delta z)$

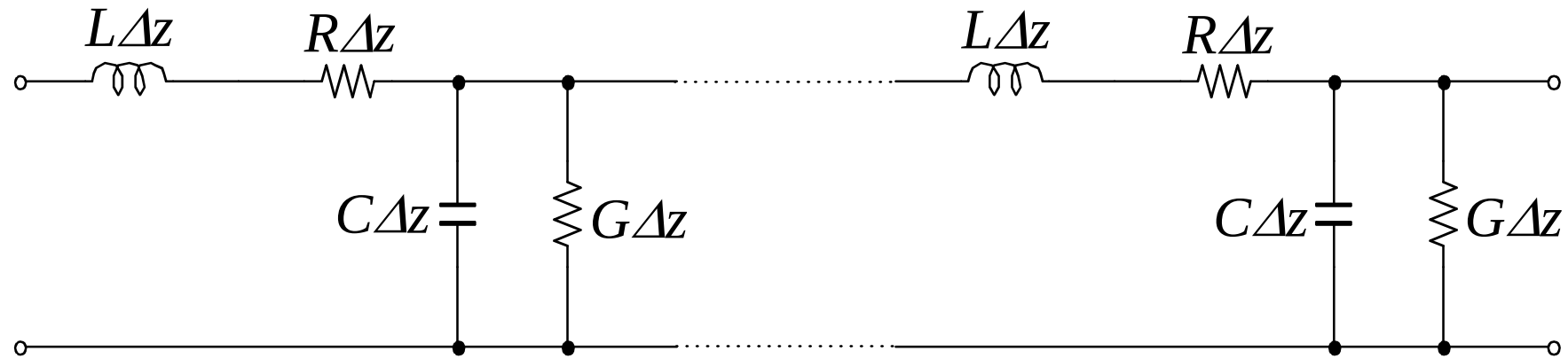
伝送線路の扱い

- 厳密・・・Maxwellの方程式を境界条件のもとで解く
 金属上で電界の接線成分が0
 誘電体境界面で電磁界の接線成分が連続
- 分布定数回路(近似)理論
 2導体線路, 平面波伝搬, 回路理論の延長

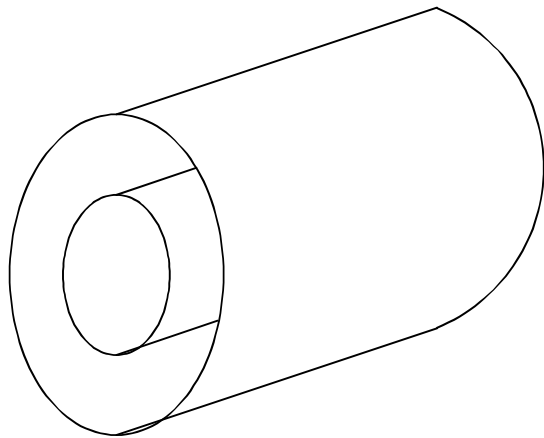


L, C ・・・単位長さあたりのインダクタンス, キャパシタンス
 Δz ・・・微小長さ

分布定数回路の導入



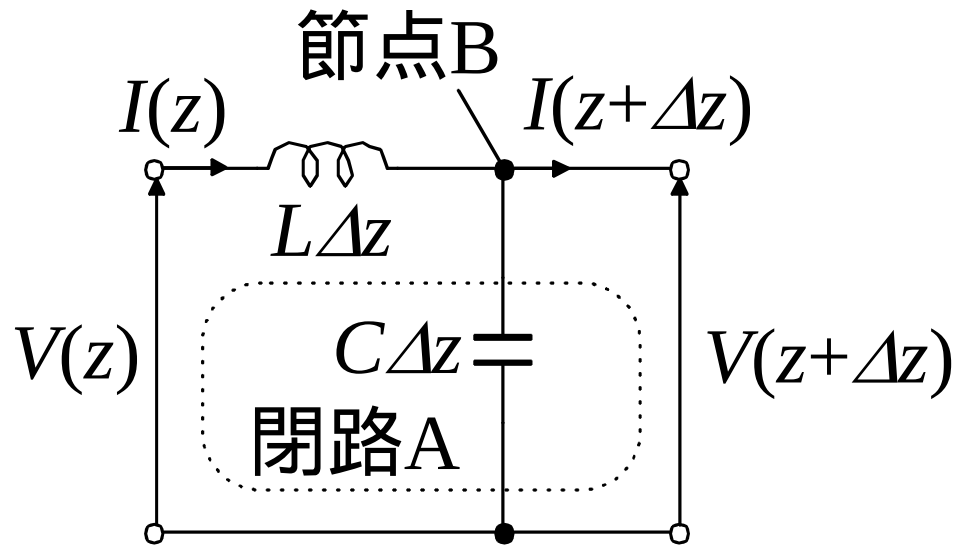
同軸線路



- インダクタンス $L(=\Phi/I)$ ・・・導体上電流 I により生じる磁界 H の総量に関係
- キャパシタンス $C(=Q/V)$ ・・・導体間電圧 V により生じる電界 E の総量に関係
- 抵抗 R ・・・電流 I により生じる導体の損失
- コンダクタンス G ・・・電圧 V により生じる導体間材料(誘電体)の損失
- 単位長さあたりの値
- 普通は ωL R , ωC G

電信方程式(無損失)の導出

11/86



- 無損失... $R=0, G=0$

- 1周期分での回路方程式

閉路Aに関する電圧則

$$V(z) = j\omega L\Delta z I(z) + V(z + \Delta z)$$

節点Bに関する電流則

$$I(z) = j\omega C\Delta z V(z + \Delta z) + I(z + \Delta z)$$

- 電信方程式

$$\begin{cases} \frac{dV(z)}{dz} = -j\omega LI(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -j\omega CV(z) \end{cases}$$

電信方程式(無損失)と波動方程式^{9/86}

$$\text{電信方程式} \quad \begin{cases} \frac{dV(z)}{dz} = -j\omega LI(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -j\omega CV(z) \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} V(z) = V_i \exp(+j\beta z) + V_r \exp(-j\beta z) \\ I(z) = \frac{V_i}{Z_c} \exp(+j\beta z) - \frac{V_r}{Z_c} \exp(-j\beta z) \end{cases}$$

$$\text{伝搬(位相)定数} \quad \beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$\text{特性インピーダンス} \quad Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \text{(Characteristic Imp.)}$$

$$\text{波動方程式} \quad \begin{cases} \frac{dE_y}{dz} = -j\omega\mu_0 H_x \\ \frac{dH_x}{dz} = -j\omega\varepsilon_0 E_y \end{cases}$$

解

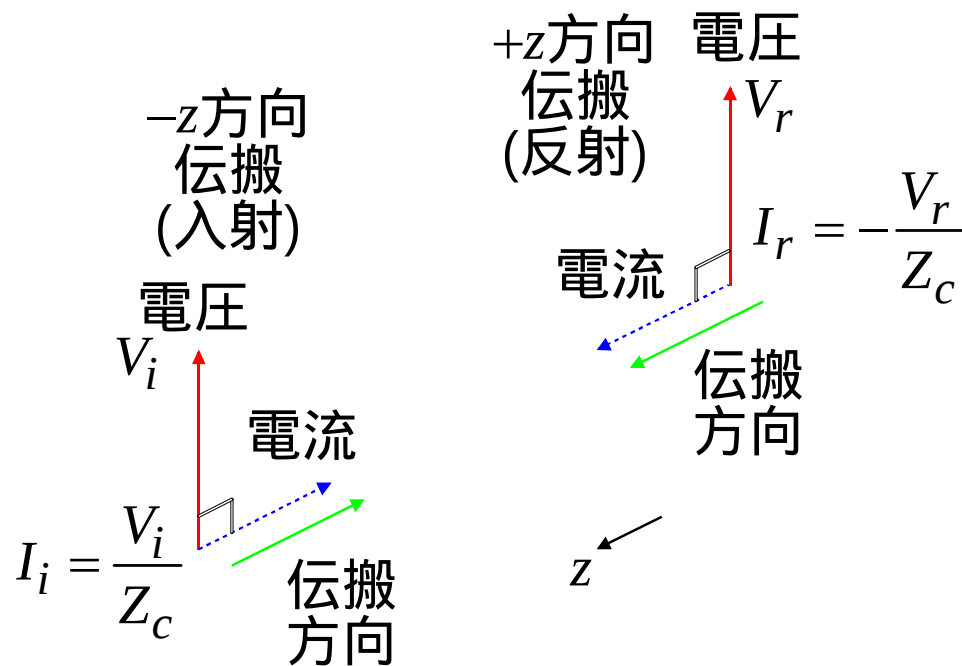
$$\begin{cases} E_y = E_a \exp(+jk_0 z) + E_b \exp(-jk_0 z) \\ H_x = \frac{E_a}{Z_0} \exp(+jk_0 z) - \frac{E_b}{Z_0} \exp(-jk_0 z) \end{cases}$$

$$\text{伝搬定数(波数)} \quad k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$\text{波動インピーダンス} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

- $V(z)$ E_y , $I(z)$ H_x , L μ_0 , C ε_0 が対応
- V_i E_a , V_r E_b , β k_0 , Z_c Z_0 が対応

電信方程式(無損失)の解の意味^{13/86}



•電力(エネルギー)

$$P_i = \frac{V_i I_i^*}{2} = \frac{|V_i|^2}{2Z_c}$$

(分母の2は振幅が波高値のため)

• 電信方程式の解

$$\begin{cases} V(z) = V_i \exp(+j\beta z) + V_r \exp(-j\beta z) \\ I(z) = \frac{V_i}{Z_c} \exp(+j\beta z) - \frac{V_r}{Z_c} \exp(-j\beta z) \end{cases}$$

• 位相(波数)定数 $\beta = \omega\sqrt{LC}$
(純虚数・・・減衰無し)

• 特性インピーダンス $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$
(純抵抗)

• 電流方向・・・伝搬方向

• 第1項・・・ $-z$ 方向伝搬成分

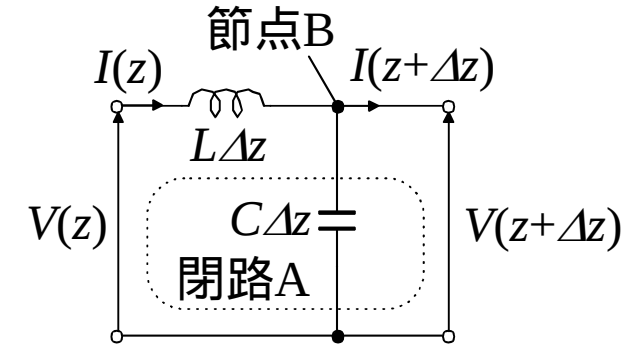
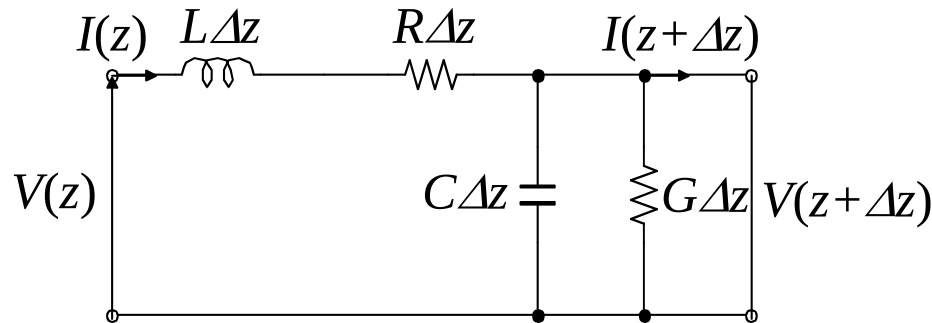
• 第2項・・・ $+z$ 方向伝搬成分
(電流の-符号に注意)

電信方程式(損失)の解

損失

無損失

回路



解

$$\begin{cases} V(z) = V_i \exp(+\gamma z) + V_r \exp(-\gamma z) \\ I(z) = \frac{V_i}{Z_c} \exp(+\gamma z) - \frac{V_r}{Z_c} \exp(-\gamma z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(z) = V_i \exp(+j\beta z) + V_r \exp(-j\beta z) \\ I(z) = \frac{V_i}{Z_c} \exp(+j\beta z) - \frac{V_r}{Z_c} \exp(-j\beta z) \end{cases}$$

伝搬
定数

$$\gamma = \sqrt{(j\omega L + R)(j\omega C + G)}$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC}$$

特性

インピーダンス

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega L + R}{j\omega C + G}}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- $j\omega L + R$ $j\omega L$, $j\omega C + G$ $j\omega C$ が対応

伝搬定数, 特性インピーダンスの近似式^{15/86}

伝搬定数(複素数) $\gamma = \sqrt{(j\omega L + R)(j\omega C + G)} = \alpha + j\beta$

位相定数(虚数部) $\beta \simeq \omega\sqrt{LC}$

減衰定数(実数部) $\alpha \simeq \frac{1}{2}\omega\sqrt{LC}\left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C}\right) \geq 0$

特性インピーダンス(複素数) $Z_c = \sqrt{\frac{j\omega L + R}{j\omega C + G}} = R_c + jX_c$

実数部 $R_c \simeq \sqrt{\frac{L}{C}}$

虚数部 $X_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L}\right)$

- $\omega L \gg R, \omega C \gg G$ の条件で近似

→ 位相定数, 特性インピーダンスの実数部は無損失と同じ

TEM波の xy 平面内電磁界

- $E_z=H_z=0$ だけをMaxwellの方程式(直角座標系)に代入
(注意:平面波の条件 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ は入れない)

Ampere,
Faradayの
法則の
一成分

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Gauss
の法則

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

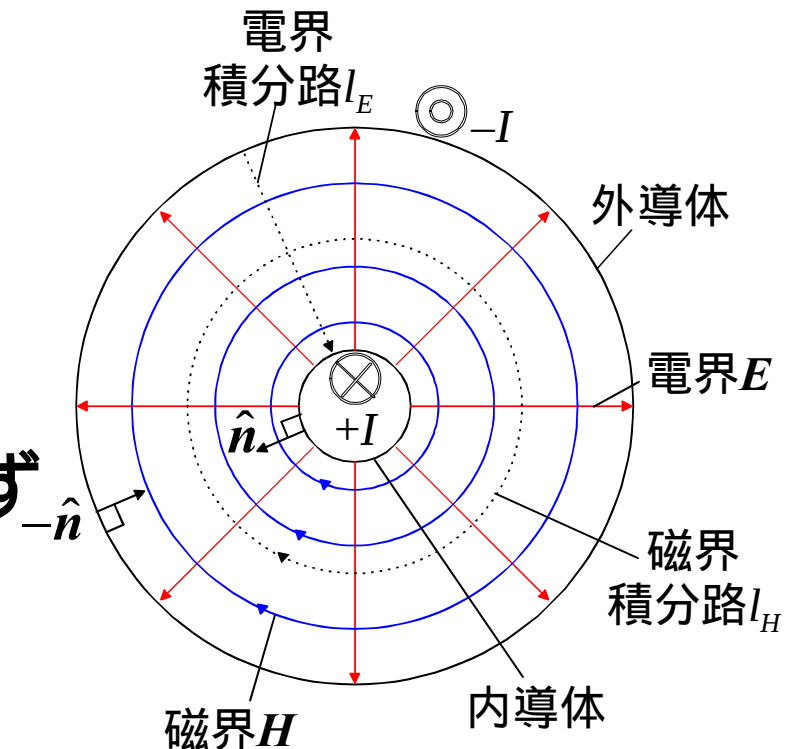
- より $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $H_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $H_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$

- へ代入 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \nabla_t^2 V = 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \nabla_t^2 U = 0$

2次元ラプラス方程式を満足(静電界の電位 V , 静磁界の磁位 U と同じ式を満足)

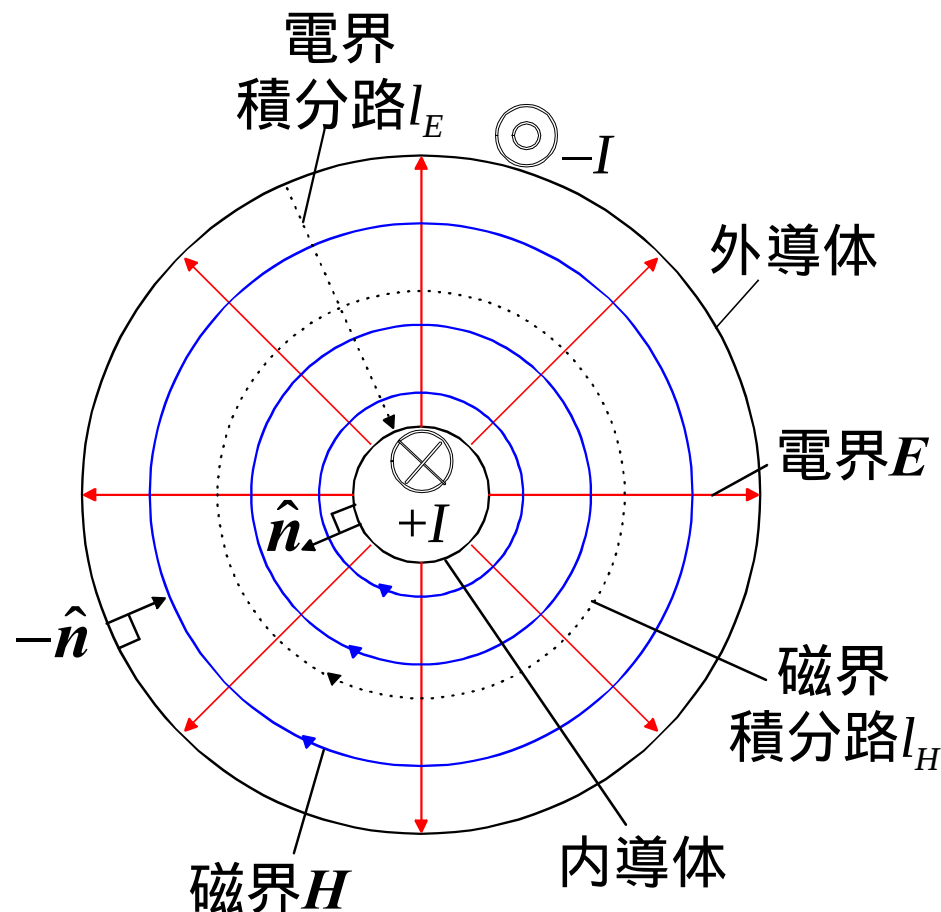
TEM波の xy 平面内電磁界の特徴^{17/86}

- 電界分布…2次元静電界分布と同じ
- 磁界分布…2次元静磁界分布と同じ
- TEM波の電界と磁界は従属(Maxwellの方程式)
 - … 静電界(時不変電荷)と静磁界(時不変電流)は独立
 - ← たまたま同じ方程式を満足するだけ
- 静電界, 静磁界の特徴と同じ
 - 電界と磁界がそれぞれ断面内で保存場 → 積分路に依らず電圧, 電流が一意に決定
 - 1導体線路ではTEM波は伝搬せず
- 電界と磁界は直交
(← 複素関数コーシー・リーマン条件)



2導体線路の電圧, 電流

同軸線路



- 電圧 $V = -\int_{l_E} E \cdot dl$

- 電流 $I = \oint_{l_H} H \cdot dl$

- 断面上で積分, 積分路は任意。

- (電流密度ベクトルの向き)
= (内向き単位法線ベクトル)
 $\times$ (導体上磁界の向き)

- …内導体上と外導体上で逆,
電流量は同じ

インダクタンス・キャパシタンスの求め方 ^{19/86}

- インダクタンス

1. 電流 I を与える
2. Ampereの法則に従い磁界 H を求める。
3. 磁界 H を積分して磁束 Φ を求める。
4. インダクタンス $L=\Phi/I$ より求める。

- キャパシタンス

1. 電荷 Q を与える
2. Gaussの法則に従い電界 E を求める。
3. 電界 E を積分して電圧 V を求める。
4. キャパシタンス $C=Q/V$ より求める。

同軸線路のインダクタンス

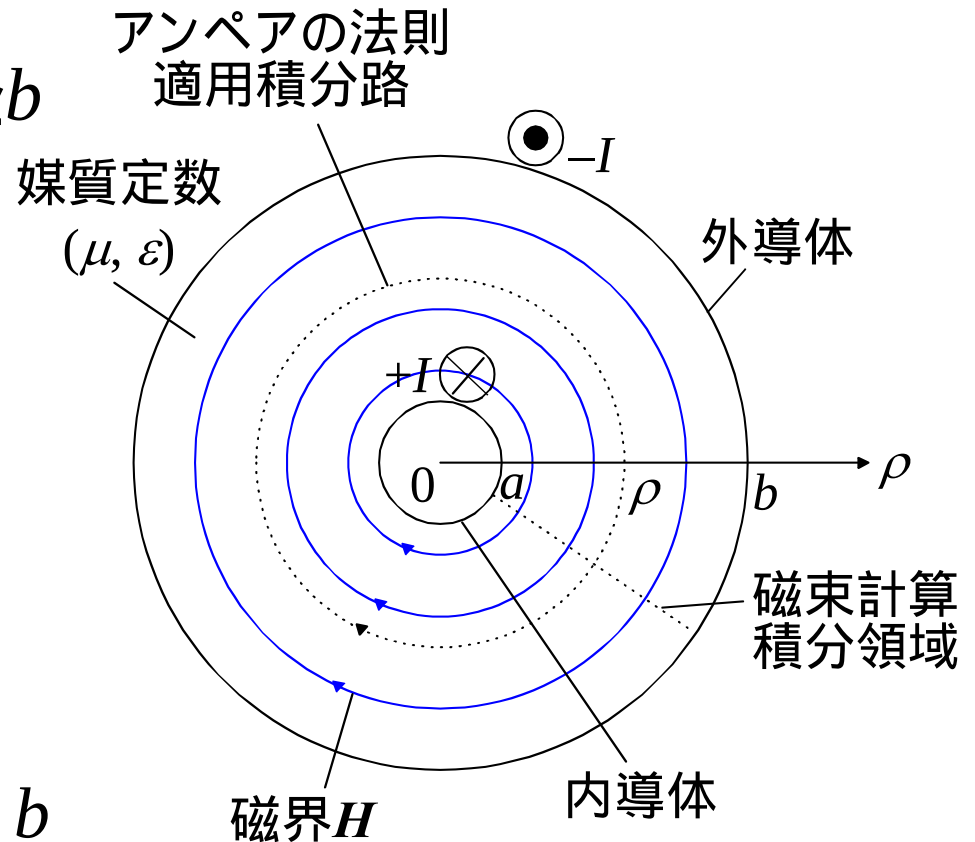
- 単位長さの同軸線路
 - 内導体半径 a , 外導体半径 b
 - 導体間媒質定数 (μ, ε)
1. 内導体に $+I$, 外導体に $-I$
 2. $\rho = \rho$ で Ampere の法則

$$H \cdot 2\pi\rho = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi\rho}$$

$$3. \text{ 磁束 } \Phi = \int_a^b \mu H d\rho = \frac{\mu I}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

$$4. \text{ インダクタンス } L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$



同軸線路のキャパシタンス

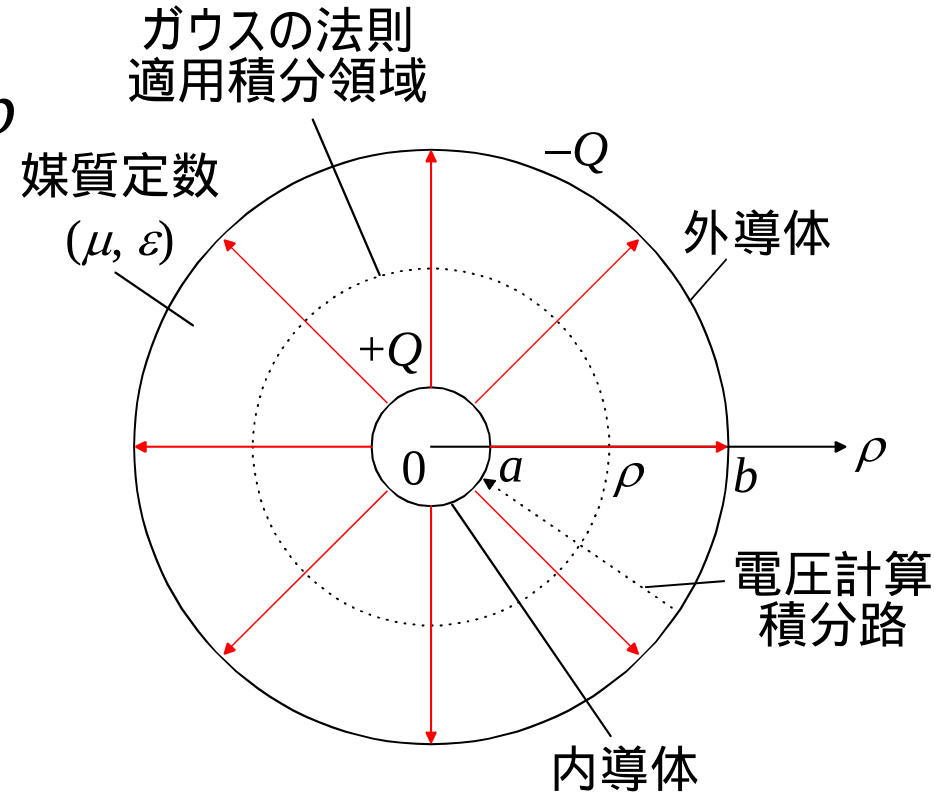
- 単位長さの同軸線路
 - 内導体半径 a , 外導体半径 b
 - 導体間媒質定数(μ, ε)
1. 内導体に $+Q$, 外導体に $-Q$
 2. ρ でGaussの法則

$$E \cdot 2\pi\rho = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\rho}$$

3. 電圧 $V = -\int_b^a E d\rho = \frac{Q}{2\pi\varepsilon} \log \frac{b}{a}$

4. キャパシタンス $C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon}{\log \frac{b}{a}}$



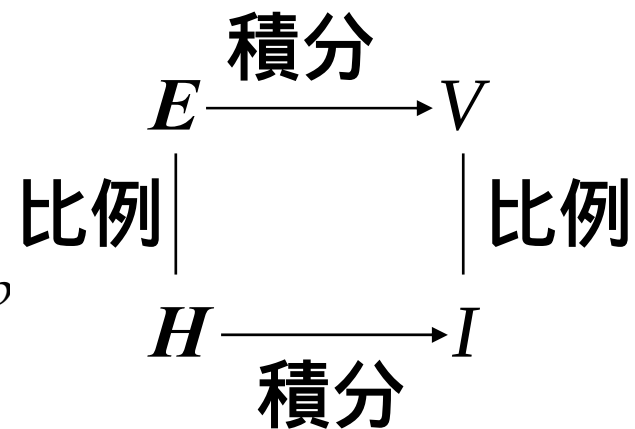
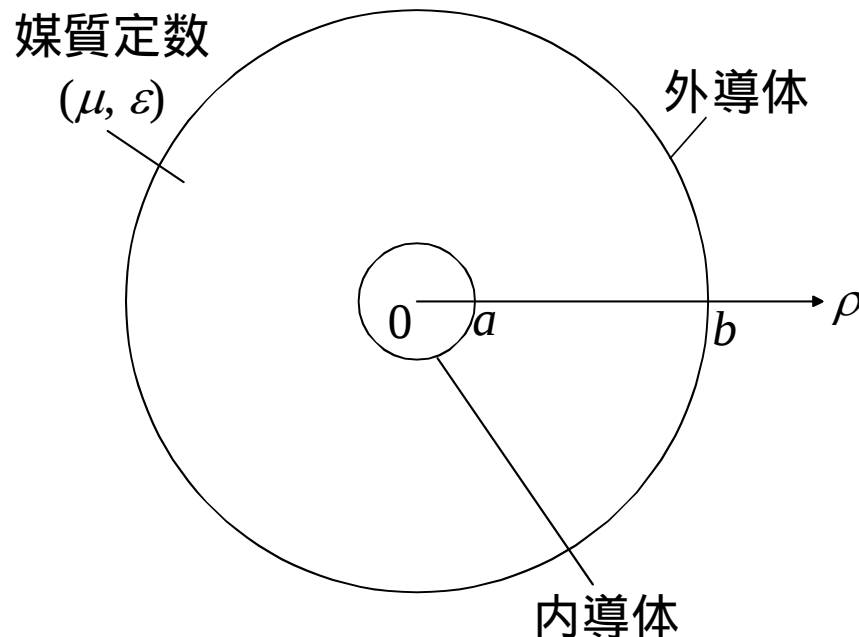
同軸線路の位相定数, 特性インピーダンス^{22/86}

- 位相定数・・・形状に依らない。TEM伝送線路なら媒質定数
数が同じなら全て同じ

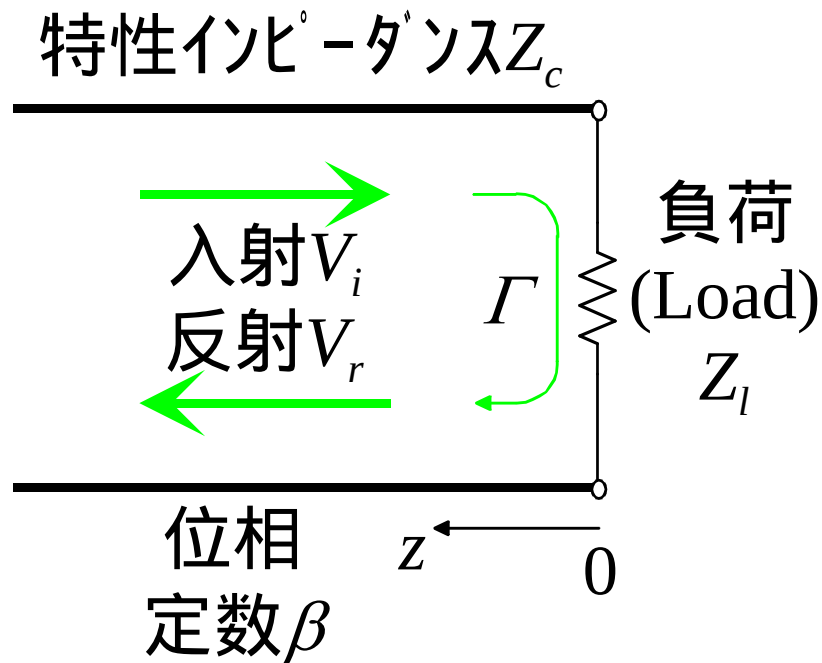
$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

- 特性インピーダンス・・・形状(比)に依る。波動インピーダンスに比例。

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \log \frac{b}{a} \quad \left(\propto \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right)$$



無損失線路に負荷接続



• 電信方程式の解

$$\begin{cases} V(z) = V_i \exp(+j\beta z) + V_r \exp(-j\beta z) \\ I(z) = \frac{V_i}{Z_c} \exp(+j\beta z) - \frac{V_r}{Z_c} \exp(-j\beta z) \end{cases}$$

• $z=0$ での条件

$$Z_l = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_i + V_r}{\frac{1}{Z_c}(V_i - V_r)}$$

→ (電圧)反射係数

$$\Gamma = \frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c} \quad Z_l = Z_c \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

反射係数を用いた表現

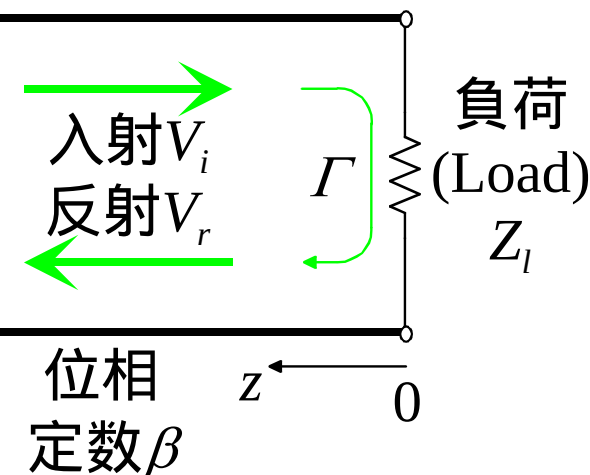
$$\begin{cases} V(z) = V_i \{ \exp(+j\beta z) + \Gamma \exp(-j\beta z) \} \\ I(z) = \frac{V_i}{Z_c} \{ \exp(+j\beta z) - \Gamma \exp(-j\beta z) \} \end{cases}$$

反射係数の意味

• 反射係数 $\Gamma = \frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c}$

$P_i = \frac{|V_i|^2}{2Z_c}$

特性インピーダンス Z_c

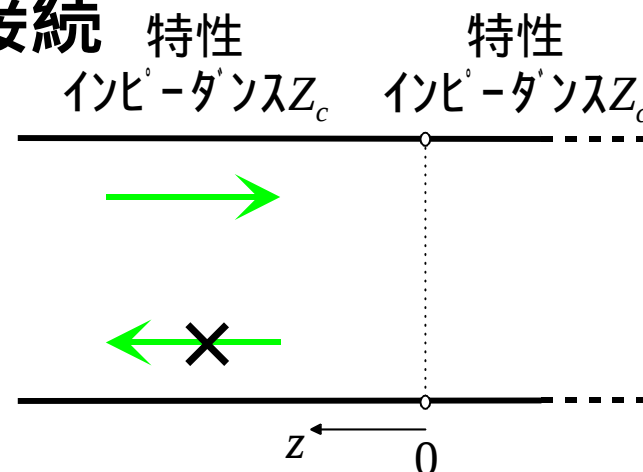
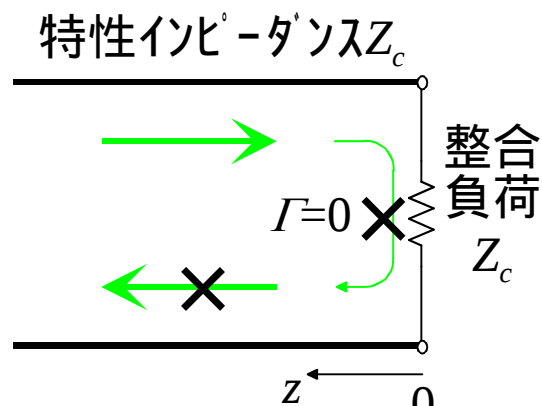


• $|\Gamma|^2 = (\text{電力})$ 反射係数

• 負荷...受動回路 $\rightarrow |\Gamma| \leq 1$

• $\Gamma = 0$ (無反射条件) $Z_l = Z_c$ (整合負荷)
(複素共役ではない)

• 整合負荷接続 無限長線路接続



• 短絡 $Z_l = 0 \rightarrow \Gamma = -1$, 開放 $Z_l = \infty \rightarrow \Gamma = +1$

• 特性インピーダンスが同じでも断面形状が異なれば反射あり

参照面の変更

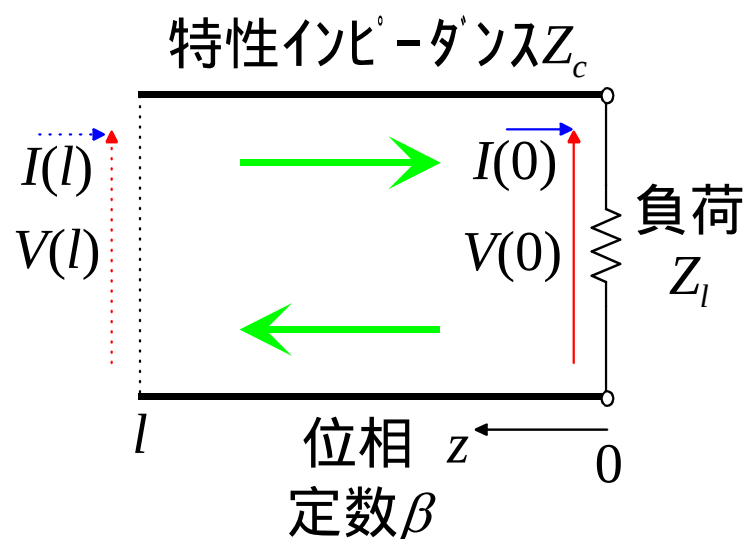
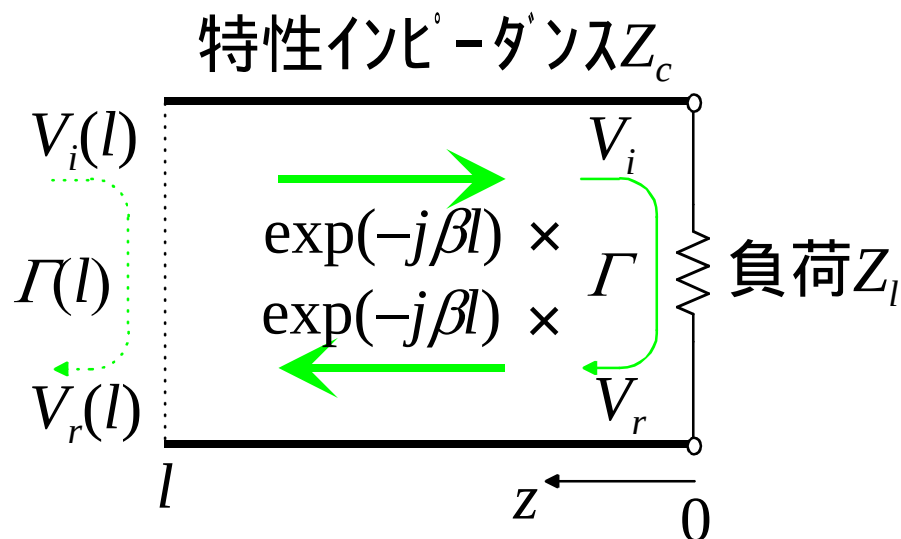
• 反射係数

$$\begin{aligned}\Gamma(l) &= \frac{V_r(l)}{V_i(l)} = \frac{V_r \exp(-j\beta l)}{V_i \exp(+j\beta l)} \\ &= \Gamma \exp(-2j\beta l) \\ &= \exp(-j\beta l) \times \Gamma \times \exp(-j\beta l)\end{aligned}$$

• インピーダンス

$$\begin{aligned}Z(l) &= \frac{V(l)}{I(l)} = Z_c \frac{V_i \exp(+j\beta l) + V_r \exp(-j\beta l)}{V_i \exp(+j\beta l) - V_r \exp(-j\beta l)} \\ &= Z_c \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} = Z_c \frac{Z_l + jZ_c \tan \beta l}{Z_c + jZ_l \tan \beta l}\end{aligned}$$

$$\Gamma(l) = \frac{Z(l) - Z_c}{Z(l) + Z_c} \quad \text{反射係数を介して変換}$$



規格化インピーダンス

- 反射係数・・・インピーダンスの分子, 分母が同次数

$$\Gamma = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c}$$

- 特性インピーダンスで規格化・・・ $\hat{Z}_l = \frac{Z_l}{Z_c}$

$$\rightarrow \Gamma = \frac{\hat{Z}_l - 1}{\hat{Z}_l + 1}, \quad \hat{Z}_l = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

$$\hat{Z}(l) = \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} = \frac{\hat{Z}_l + j \tan \beta l}{1 + j \hat{Z}_l \tan \beta l} \quad \Gamma(l) = \frac{\hat{Z}(l) - 1}{\hat{Z}(l) + 1}$$

参照面の変更例

$$\Gamma(l) = \Gamma \exp(-2j\beta l) \quad \hat{Z}(l) = \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} \quad \hat{Z}_l = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

- 負荷から1/2波長($l = \lambda/2$)・・・規格化負荷インピーダンス

$$\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \Gamma \exp\left(-2j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2}\right) = \Gamma \exp(-2j\pi) = \Gamma$$

$$\hat{Z}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \hat{Z}_l \quad Z\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \hat{Z}_l Z_c = Z_l$$

- 負荷から1/4波長($l = \lambda/4$)・・・規格化負荷インピーダンスの逆数

$$\Gamma\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \Gamma \exp\left(-2j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}\right) = \Gamma \exp(-j\pi) = -\Gamma$$

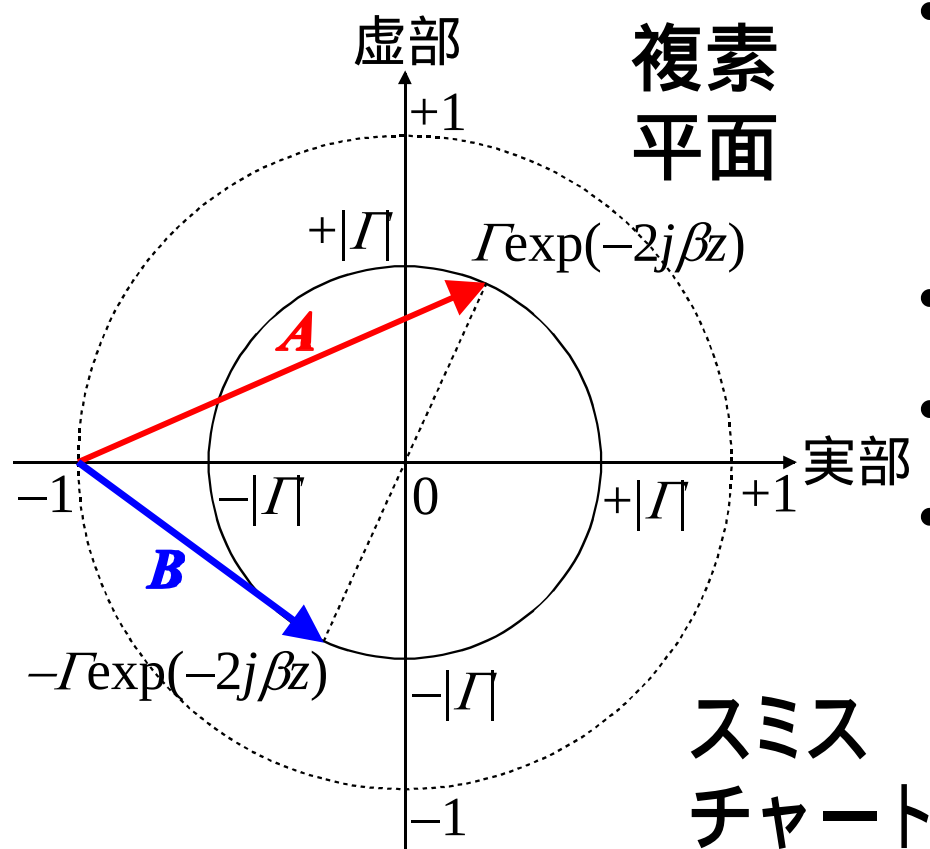
$$\hat{Z}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = \frac{1}{\hat{Z}_l} \quad Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{1}{\hat{Z}_l} Z_c = \frac{Z_c^2}{Z_l}$$

無損失線路の定在波分布

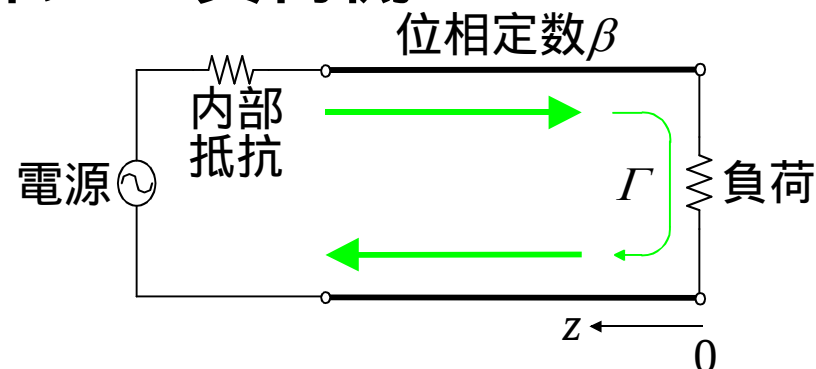
$$\begin{cases} V(z) = V_i \{ \exp(+j\beta z) + \Gamma \exp(-j\beta z) \} = V_i \exp(+j\beta z) \{ 1 + \Gamma \exp(-2j\beta z) \} \\ R_c I(z) = V_i \{ \exp(+j\beta z) - \Gamma \exp(-j\beta z) \} = V_i \exp(+j\beta z) \{ 1 - \Gamma \exp(-2j\beta z) \} \end{cases}$$

A B

純抵抗

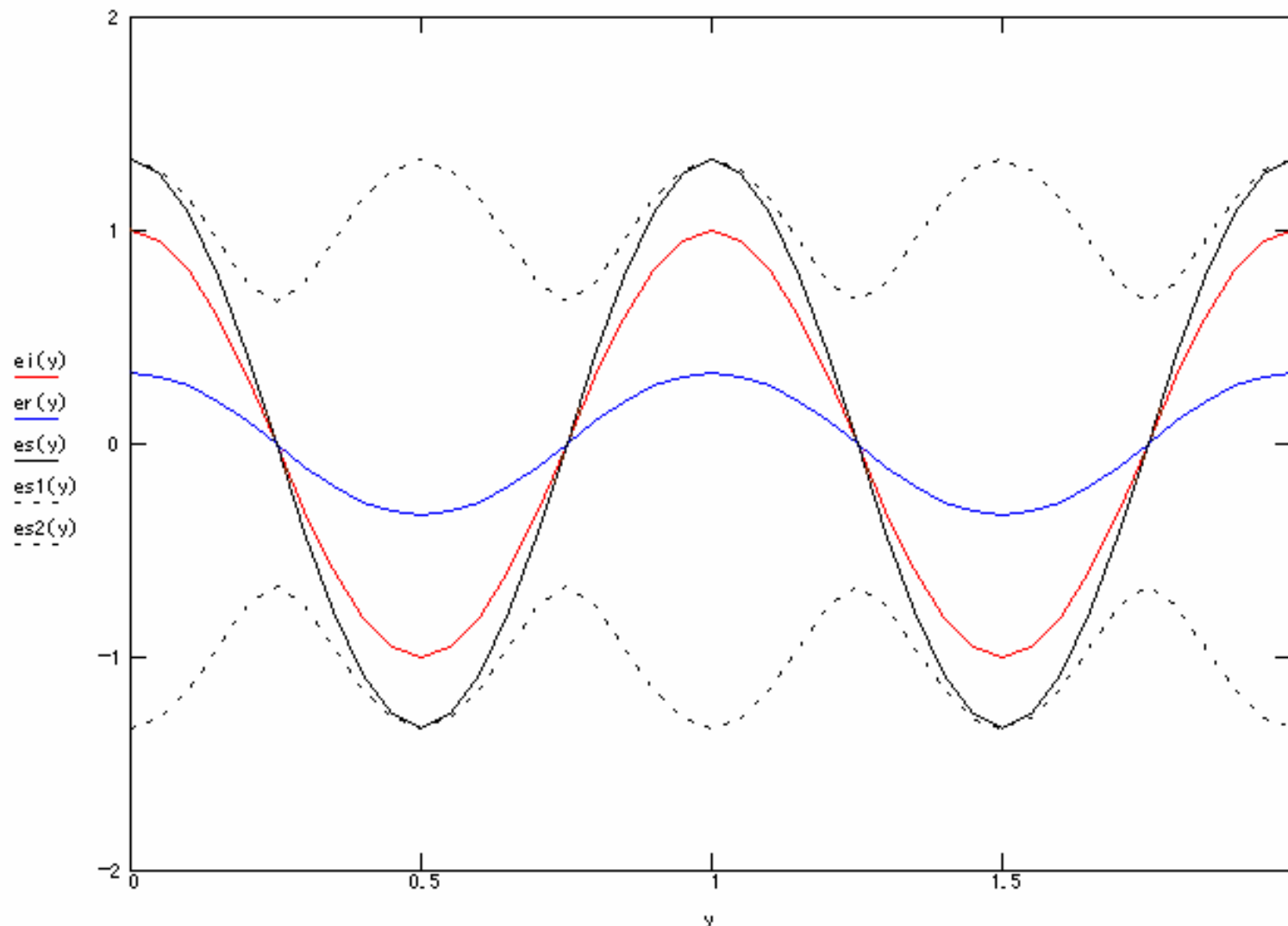


- A, Bの終点は, 半径 $|\Gamma|$ の円上(受動回路 $\rightarrow |\Gamma| \leq 1$), 直径を介して常に反対の位置
- 一周 $\cdots 2\beta\Delta z = 2\pi \rightarrow \Delta z = \lambda/2$
- 右回り $\cdots$ 電源側
- 左回り $\cdots$ 負荷側



定在波(反射係数=1/3)

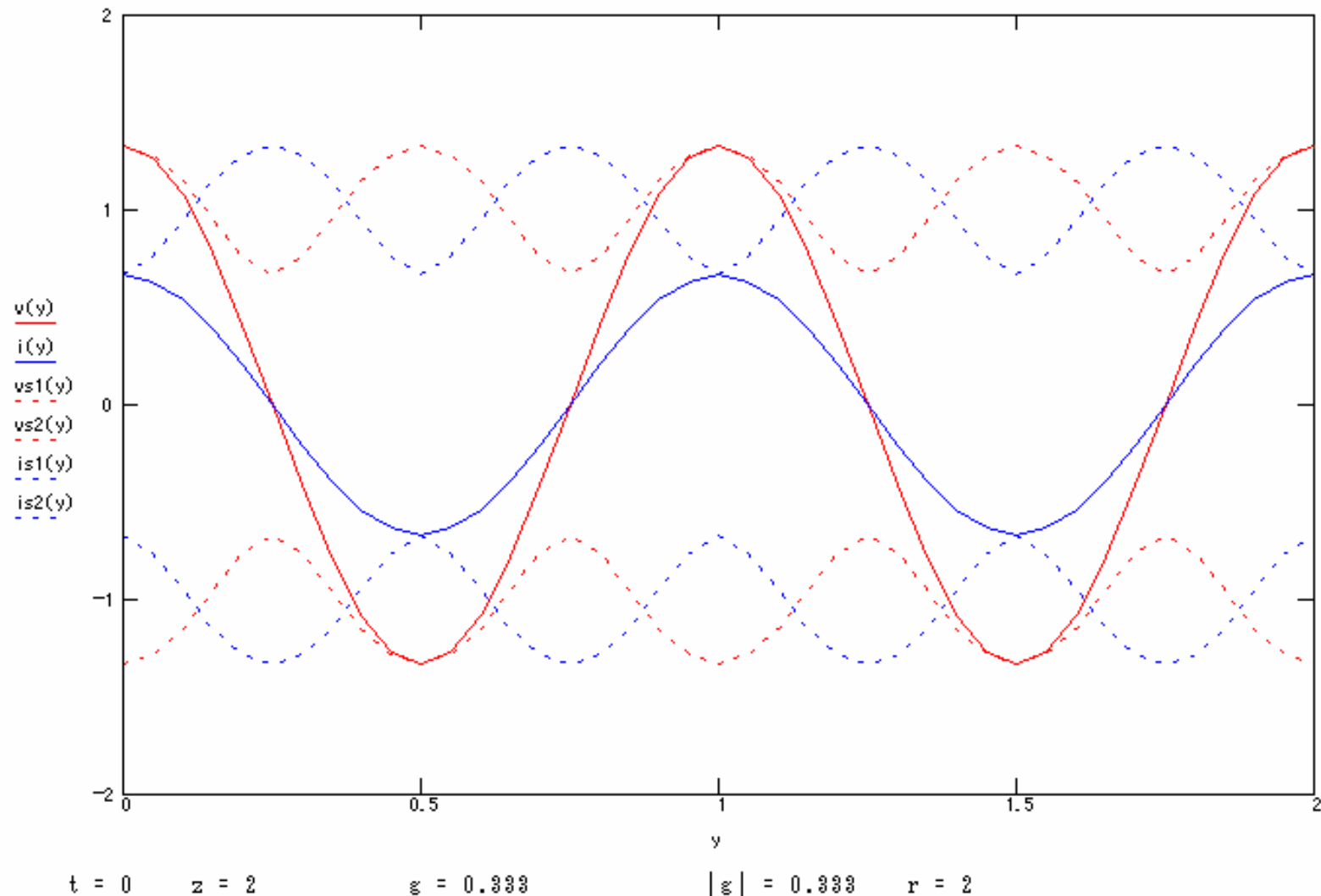
29/86



- 右から入射, 左端で反射
- 瞬時値・・・入射波, 反射波, 合成波(点線・・・包絡線)

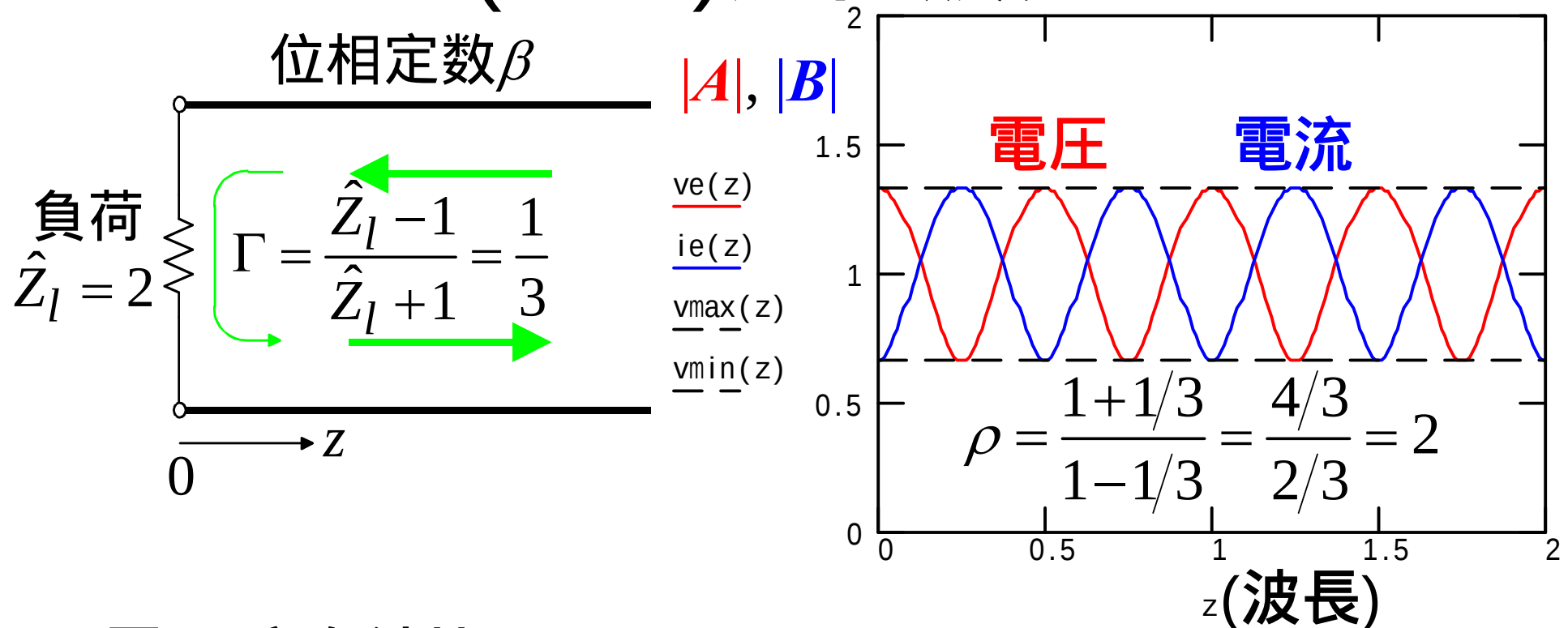
負荷($\hat{Z}_l = 2$)接続時の定在波分布^{30/86}

アニメ



- 瞬時値・・・電圧, 電流(点線・・・包絡線)
- 左端・・・常時, 電圧=電流 $\times 2$ (規格化負荷)

(電圧)定在波比



- (電圧)定在波比((Voltage) Standing Wave Ratio)

$$\rho = \frac{|V(z)|_{\max}}{|V(z)|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

$$|\Gamma| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}$$

- 受動回路 $\cdots \rho \geq 1$

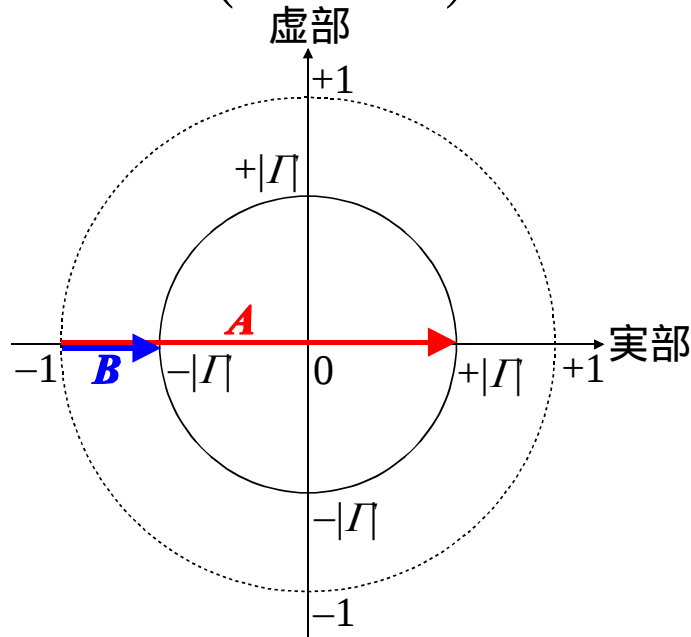
$$|\Gamma| \leq 1$$

電圧最大点, 最小点でのインピーダンス^{32/86}

$$Z(z) = R_c \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = R_c \frac{1 + \Gamma \exp(-2j\beta z)}{1 - \Gamma \exp(-2j\beta z)}$$

- 電圧最大(電流最小)位置

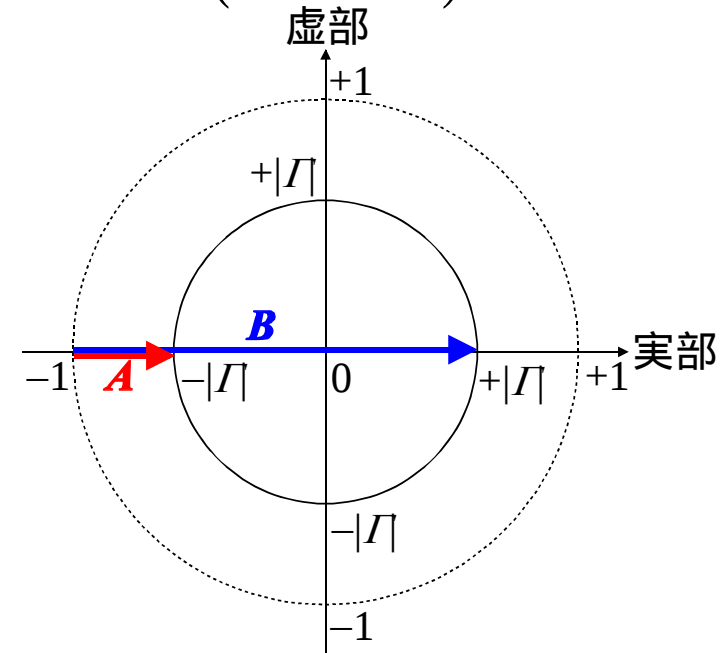
$$\Gamma \exp(-2j\beta z) = 1$$



$$Z(z) = R_c \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = R_c \rho$$

- 電圧最小(電流最大)位置

$$\Gamma \exp(-2j\beta z) = -1$$

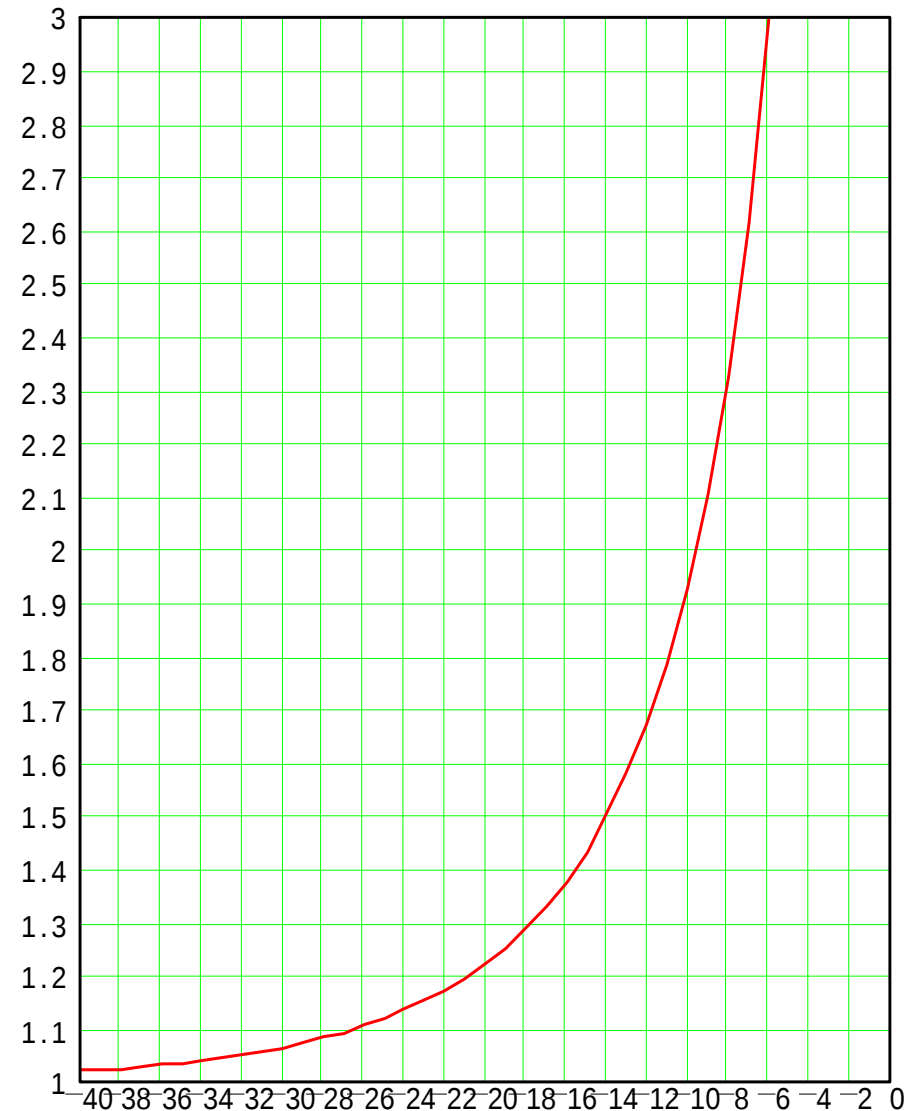


$$Z(z) = R_c \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{R_c}{\rho}$$

デシベル(dB)

- 振幅 $A \cdots 20\log_{10}A$
- 電力 $P \cdots 10\log_{10}P$
($P \propto A^2$)
- $A=0.1=10\% \cdots -20\text{dB}$
- $P=0.1=10\% \cdots -10\text{dB}$
- $P=0.01=1\% \cdots -20\text{dB}$
- リターンロス(dB) = -反射(dB) $\frac{r(g)}{r(g)}$
リターンロス20dB = 反射-20dB
- $\rho = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \quad |\Gamma| = \frac{\rho-1}{\rho+1}$
- $\rho=2 \cdots |\Gamma|=1/3 (-9.54\text{dB})$
- 整合 $\cdots |\Gamma|=0 \quad \rho=1$
- 短絡, 開放 $\cdots |\Gamma|=1 \quad \rho=\infty$

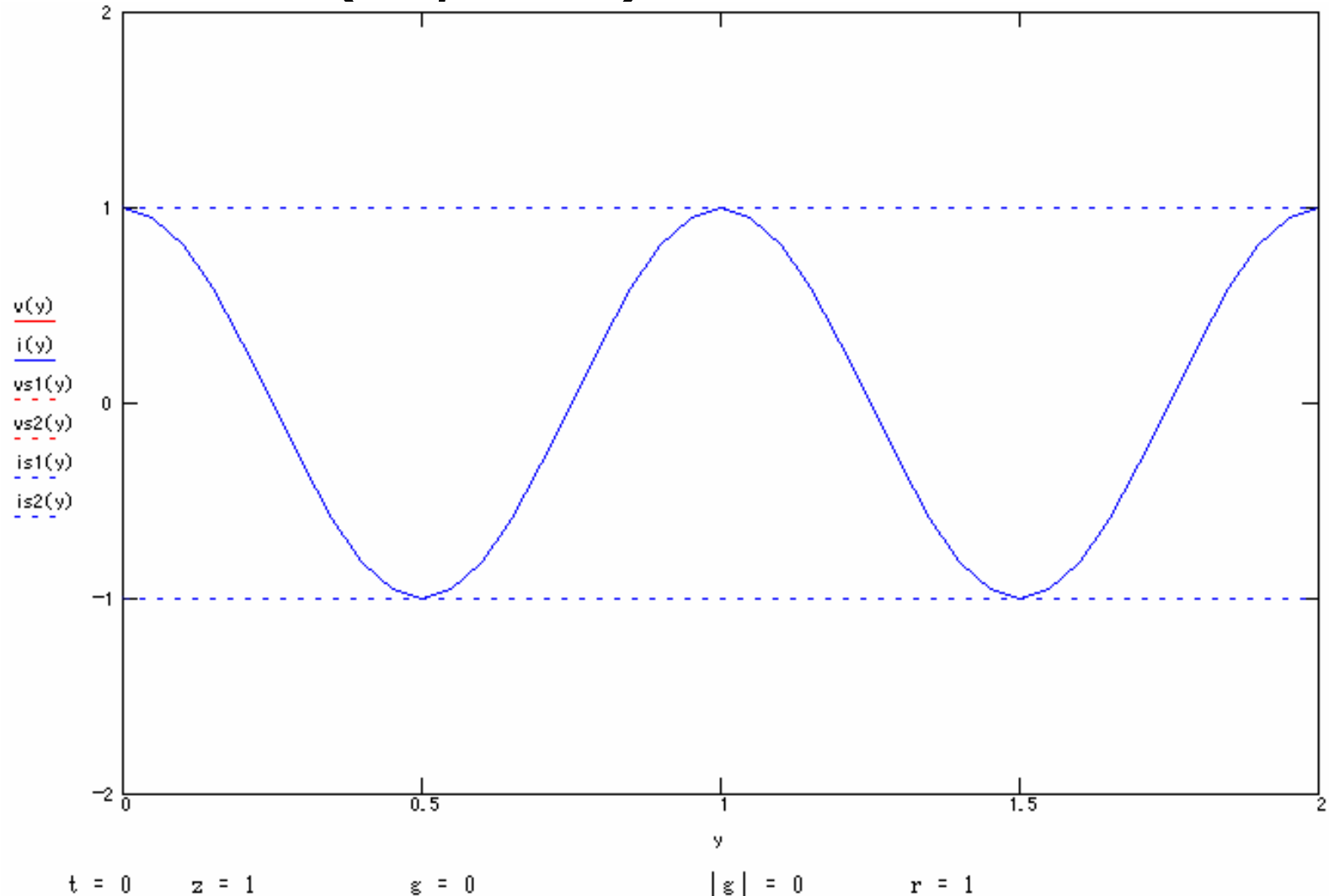
定在波比



反射係数(dB)

整合負荷($\hat{Z}_l = 1$)接続時の分布^{34/86}

アニメ



- 瞬時値・・・電圧, 電流(点線・・・包絡線)
- 左端・・・常時, 電圧=電流

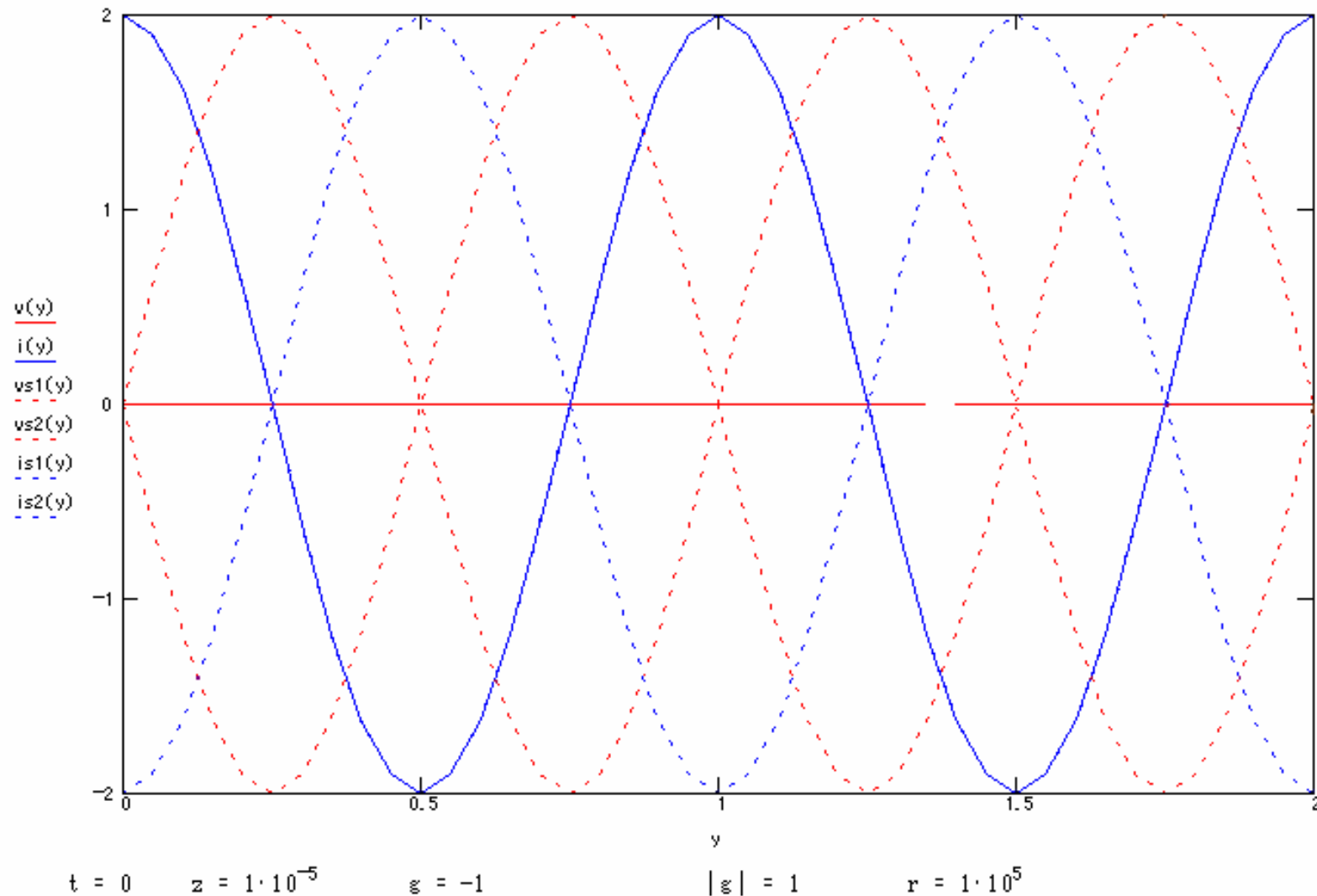
短絡($\hat{Z}_l = 0$)時の定在波分布の導出^{35/86}

$$\begin{cases} V(z) = V_i \{ \exp(+j\beta z) - \exp(-j\beta z) \} = 2jV_i \sin \beta z \\ I(z) = \frac{V_i}{R_c} \{ \exp(+j\beta z) + \exp(-j\beta z) \} = \frac{2V_i}{R_c} \cos \beta z \end{cases}$$

- 反射係数 $\Gamma = -1 \cdots$ 定在波比 $\rho = \infty$
- 分布(z)の違い $\cdots z=0$ で電圧0, 電流最大
腹と節が $1/4$ 波長ずれている
- 時刻の違い $\cdots$ 電圧が電流より $1/4$ 周期早い($T = \text{周期}$)

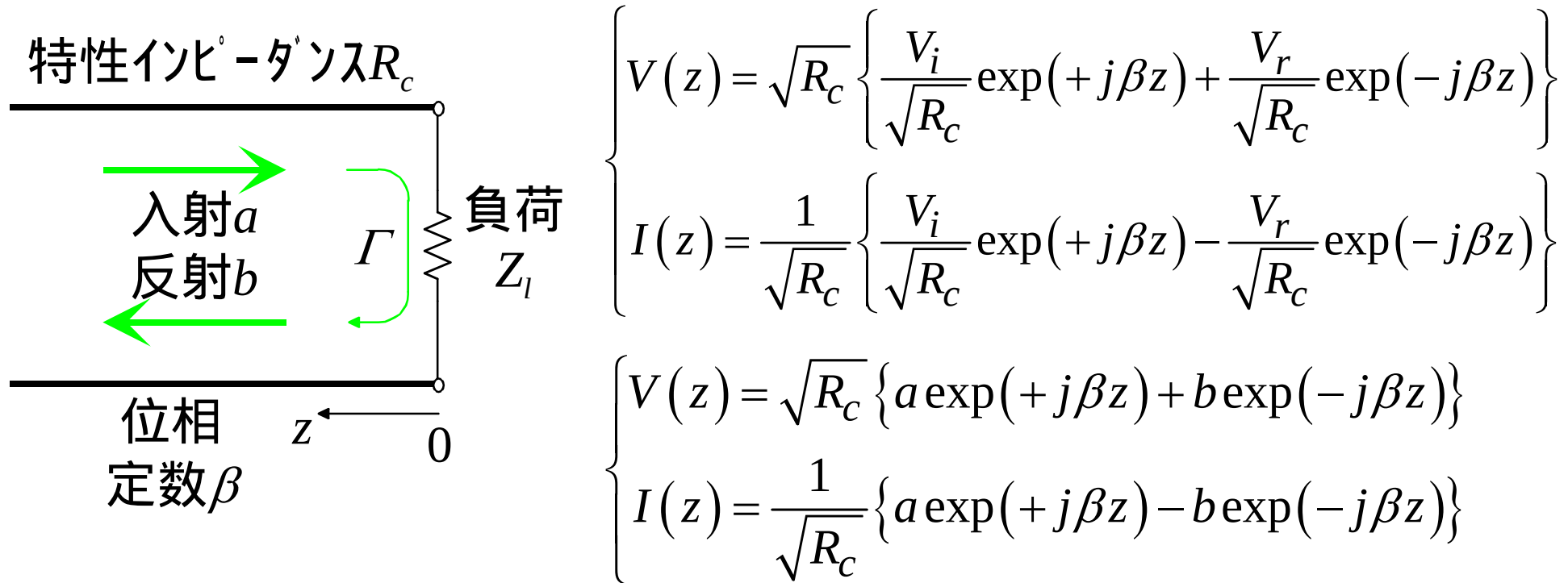
$$j = \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(j\omega\frac{T}{4}\right)$$

アニメ 短絡($\hat{Z}_l = 0$)時の定在波分布



- 瞬時値・・・電圧, 電流(点線・・・包絡線)
- 左端・・・常時, 電圧=0

定在波分布の進行波表現



$$a = \frac{V_i}{\sqrt{R_c}} \quad b = \frac{V_r}{\sqrt{R_c}}$$

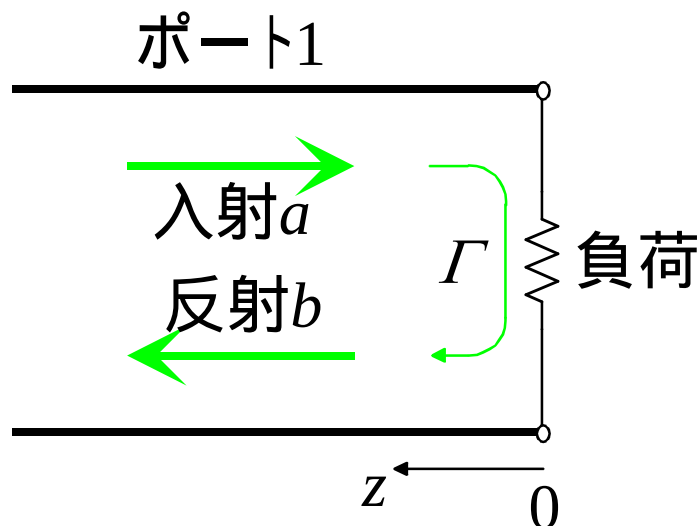
入射電力 $|a|^2 = \frac{|V_i|^2}{R_c} = 2P_i$ 反射電力 $|b|^2 = \frac{|V_r|^2}{R_c} = 2P_r$

- 反射係数・・・電圧反射係数と同じ

$$\Gamma = \frac{V_r}{V_i} = \frac{V_r / \sqrt{R_c}}{V_i / \sqrt{R_c}} = \frac{b}{a}$$

(2は振幅が
波高値のため)

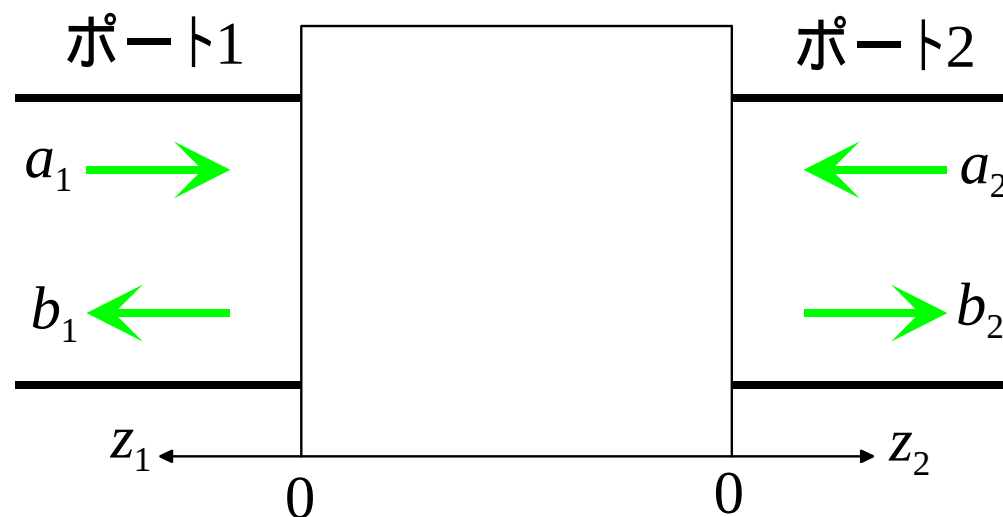
散乱行列



- 入射... a , 反射... b
- 外側に向かって正
(回路を背にして)
- 1ポート回路
(1端子対回路, 2端子回路)

$$b = \Gamma a$$

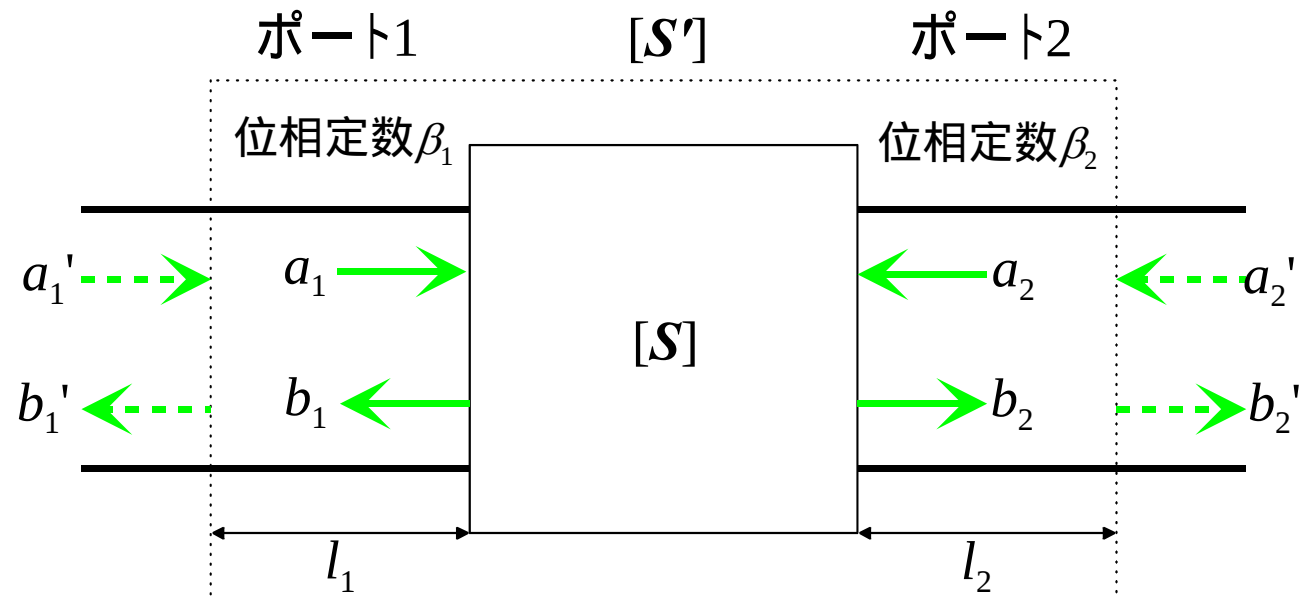
$$b_1 = S_{11} a_1$$



$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

- 2ポート回路
- S_{ij} ... ポート j 入力, ポート i 出力
- 受動回路
→ 可逆... 対称行列 ($S_{ji} = S_{ij}$)
- 非可逆... $S_{ji} \neq S_{ij}$

散乱行列の参照面の変更



$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1' \exp(+j\beta_1 l_1) \\ b_2' \exp(+j\beta_2 l_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \exp(-j\beta_1 l_1) \\ a_2' \exp(-j\beta_2 l_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \exp(+j\beta_1 l_1) & 0 \\ 0 & \exp(+j\beta_2 l_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-j\beta_1 l_1) & 0 \\ 0 & \exp(-j\beta_2 l_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-j\beta_1 l_1) & 0 \\ 0 & \exp(-j\beta_2 l_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-j\beta_1 l_1) & 0 \\ 0 & \exp(-j\beta_2 l_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

無損失回路の散乱行列

- 無損失(入射電力=反射電力)

$[S]$ がユニタリー行列($[S]^\dagger [S] = [I]$ を満足)

$\dagger \cdots$ ユニタリー演算(転置(t)して複素共役(*)), $[I] \cdots$ 単位行列

- 入射電力 $|a_1|^2 + |a_2|^2 = \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

- 反射電力 $|b_1|^2 + |b_2|^2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

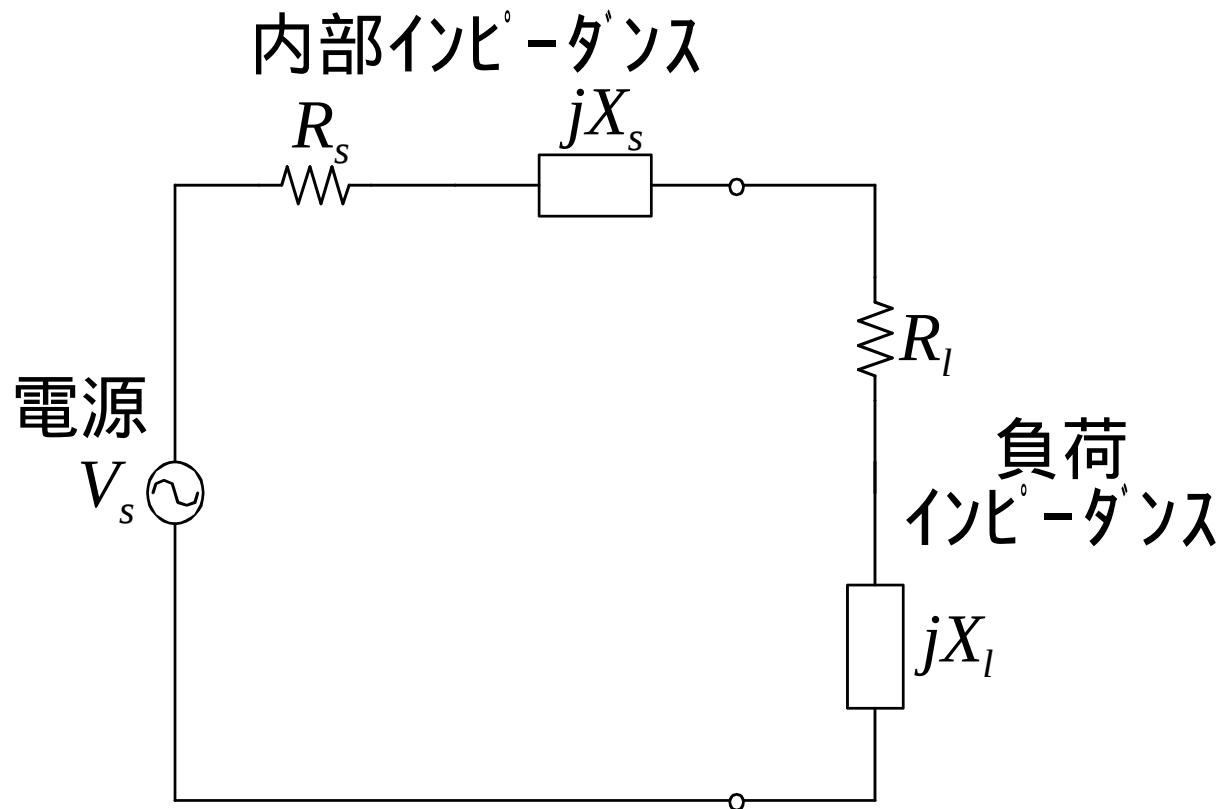
$$= \left\{ \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \right\}^\dagger \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

集中定数回路での整合(直列)

41/86

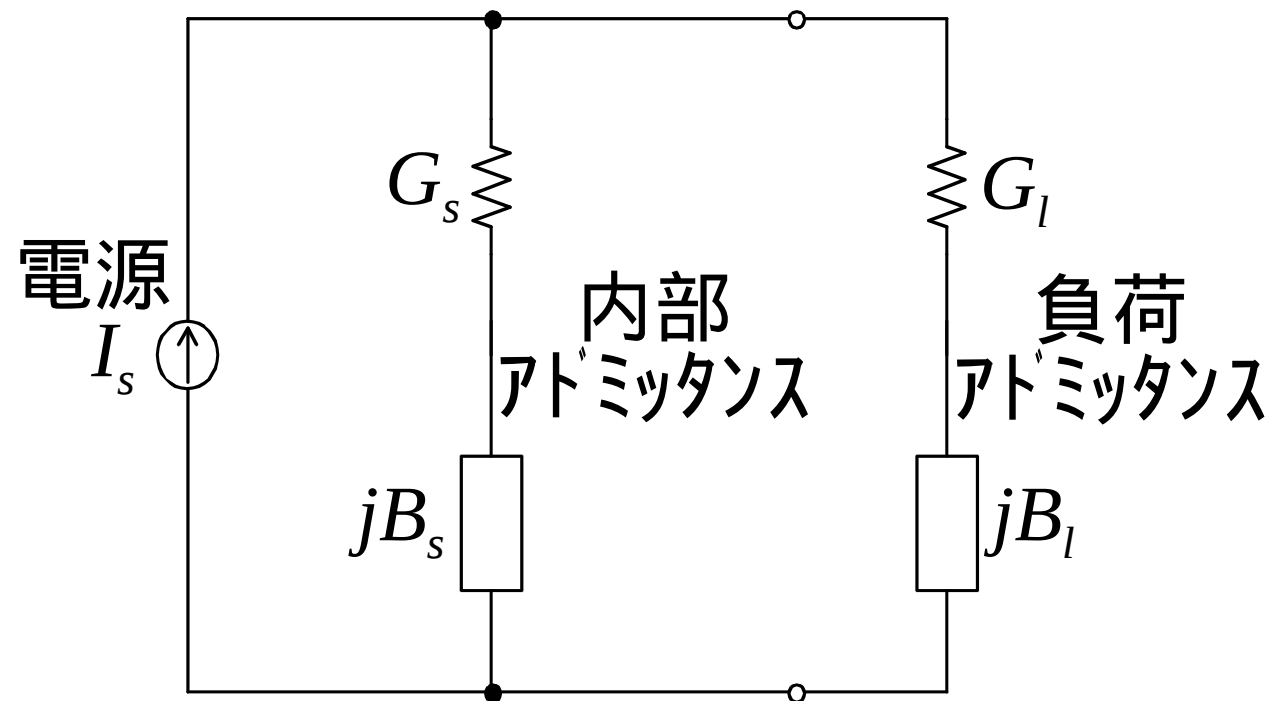


- 共役整合... $R_l = R_s$, $X_l = -X_s$
- 最大有能電力(負荷抵抗での最大消費電力)
= 電源供給電力の半分
(分母の2は振幅が波高値のため)

$$P_{l\max} = \frac{1}{2} \frac{|V_s|^2}{4R_l}$$

集中定数回路での整合(並列)

42/86

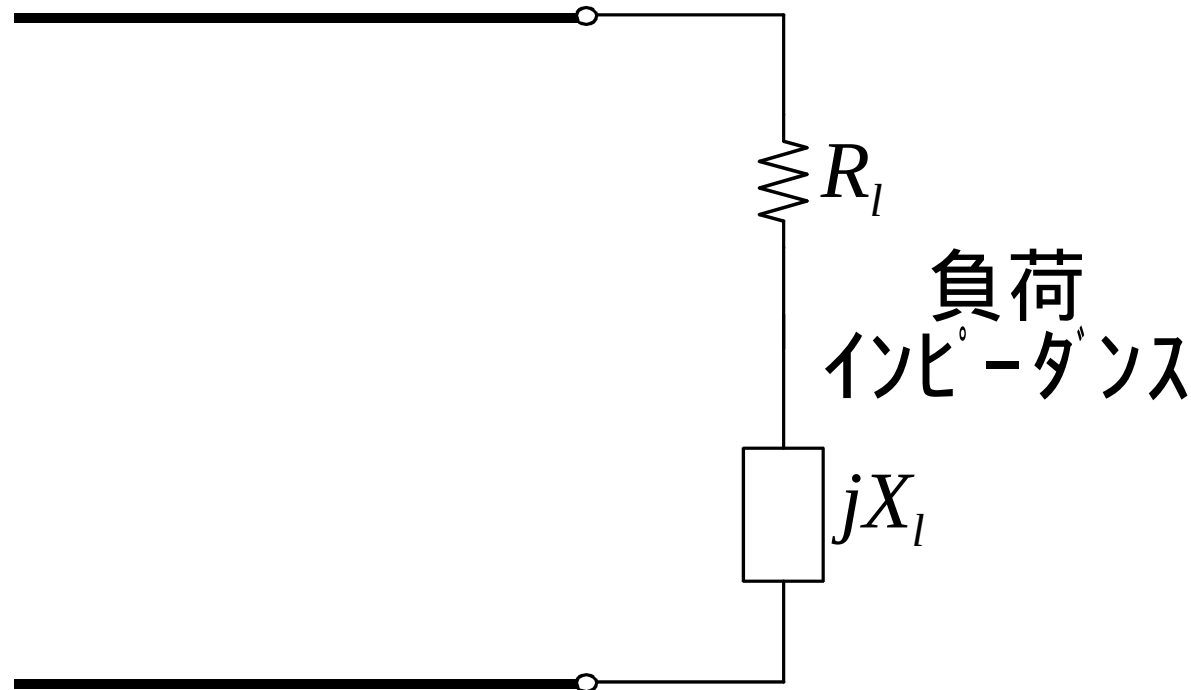


- 共役整合... $G_l = G_s$, $B_l = -B_s$
- 最大有能電力(負荷コンダクタンスでの最大消費電力)
= 電源供給電力の半分
(分母の2は振幅が波高値のため) $P_{l\max} = \frac{1}{2} \frac{|I_s|^2}{4G_l}$

分布定数回路での整合

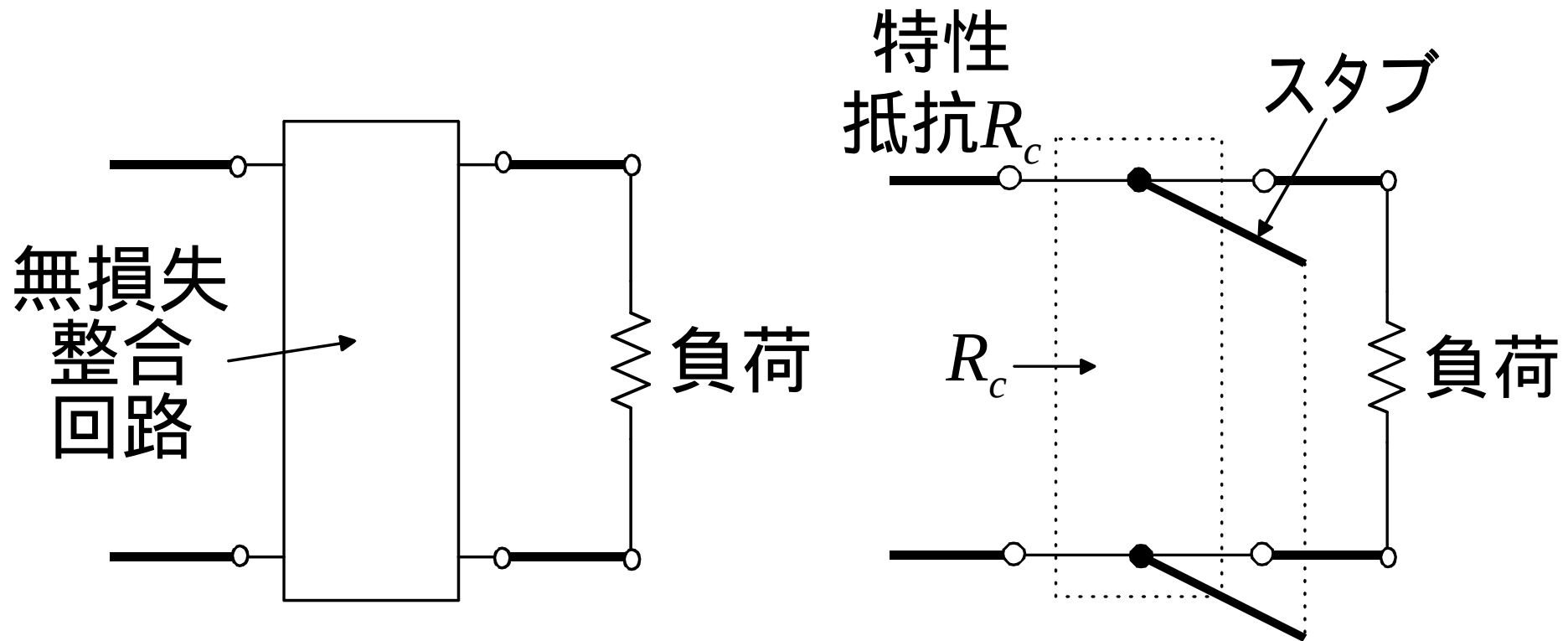
特性インピーダンス

$$Z_c = R_c + jX_c$$



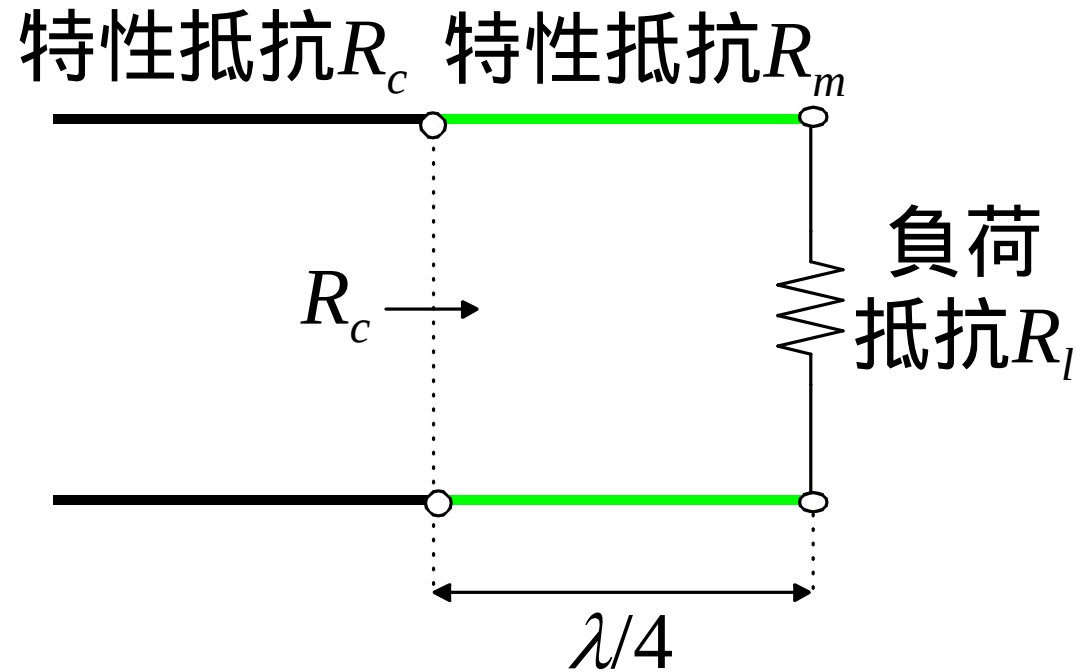
- 整合・・・ $R_l = R_c$, $X_l = X_c$
- 負荷抵抗での最大消費電力=入射電力
- 無損失線路($X_c = 0$)・・・ $R_l = R_c$, $X_l = 0$

分布定数回路での整合



- 無損失回路で整合
- 例・・・スタブ(伝送線路の先端を短絡,開放)を並列に接続
- スタブの位置で見込んだ(負荷 + スタブ)のインピーダンスを特性抵抗 R_c にする。

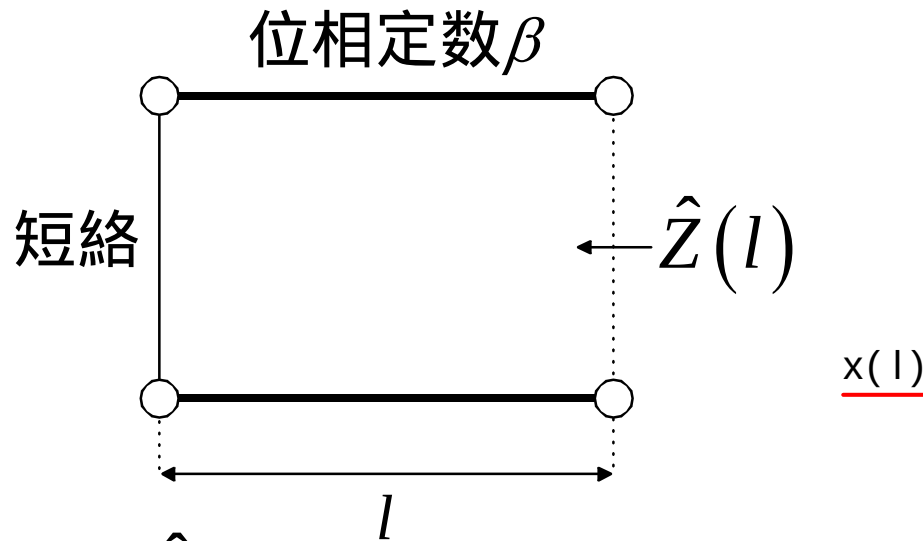
1/4波長線路による整合



$$R\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{1}{\hat{R}_l} R_m = \frac{1}{R_l / R_m} R_m = \frac{R_m^2}{R_l} = R_c$$

$$R_m = \sqrt{R_l R_c}$$

短絡($\hat{Z}_l = 0$)スタブの規格化リアクタンス 46/86

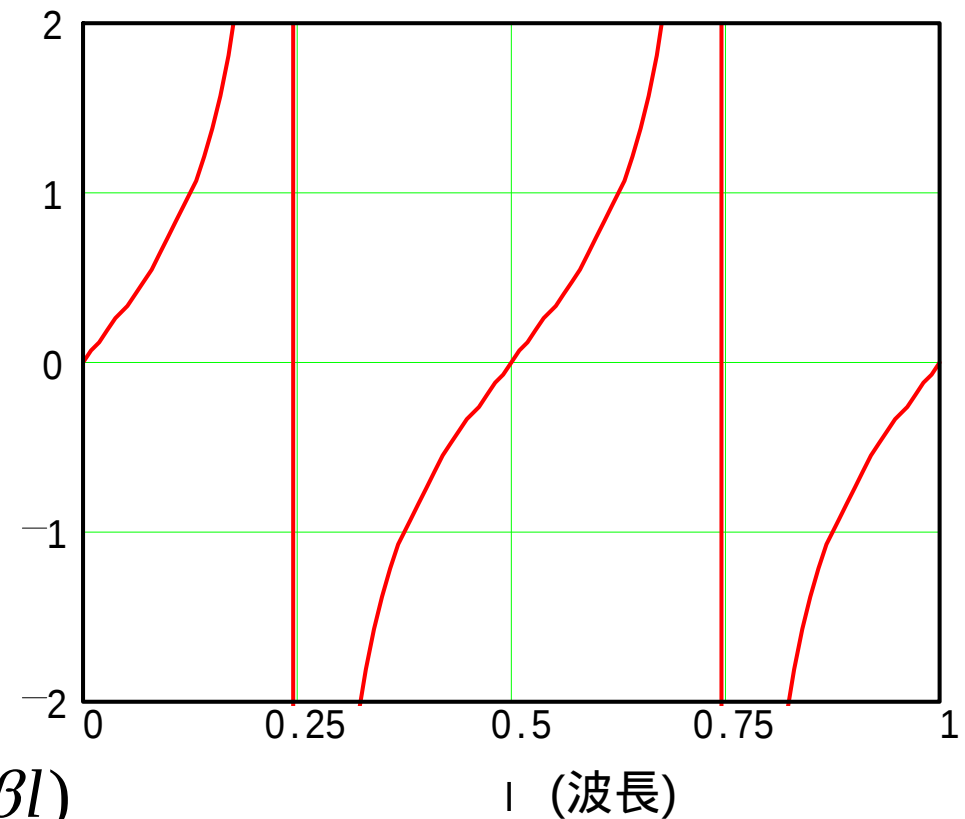


$$\Gamma = \frac{\hat{Z}_l - 1}{\hat{Z}_l + 1} = -1$$

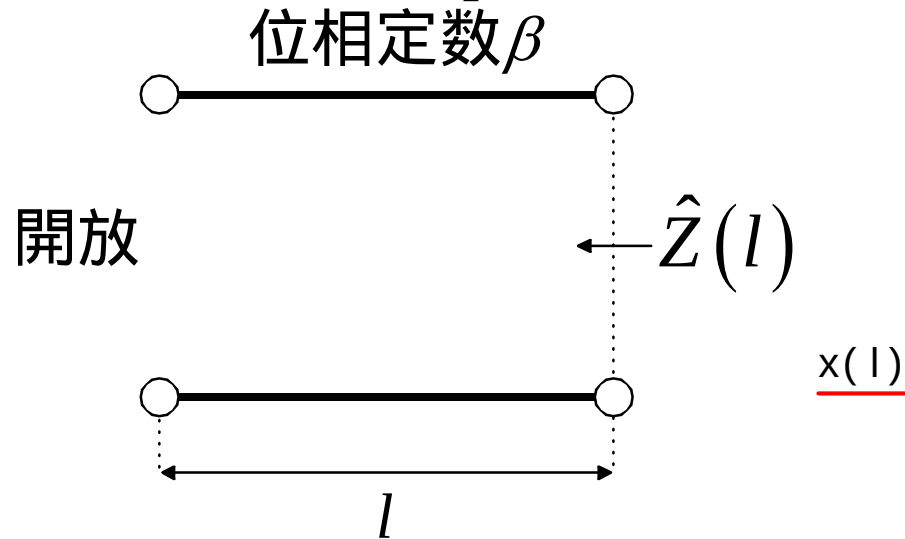
$$\Gamma(l) = \Gamma \exp(-2j\beta l) = -\exp(-2j\beta l)$$

$$\hat{Z}(l) = \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} = \frac{1 - \exp(-2j\beta l)}{1 + \exp(-2j\beta l)} = j \tan \beta l \quad \hat{Y}(l) = \frac{1}{\hat{Z}(l)} = -j \cot \beta l$$

- $0 < l < 0.25\lambda \cdots$ インダクタンス, $l = 0.25\lambda \cdots$ 並列共振
- $0.25\lambda < l < 0.5\lambda \cdots$ キャパシタンス, $l = 0.5\lambda \cdots$ 直列共振



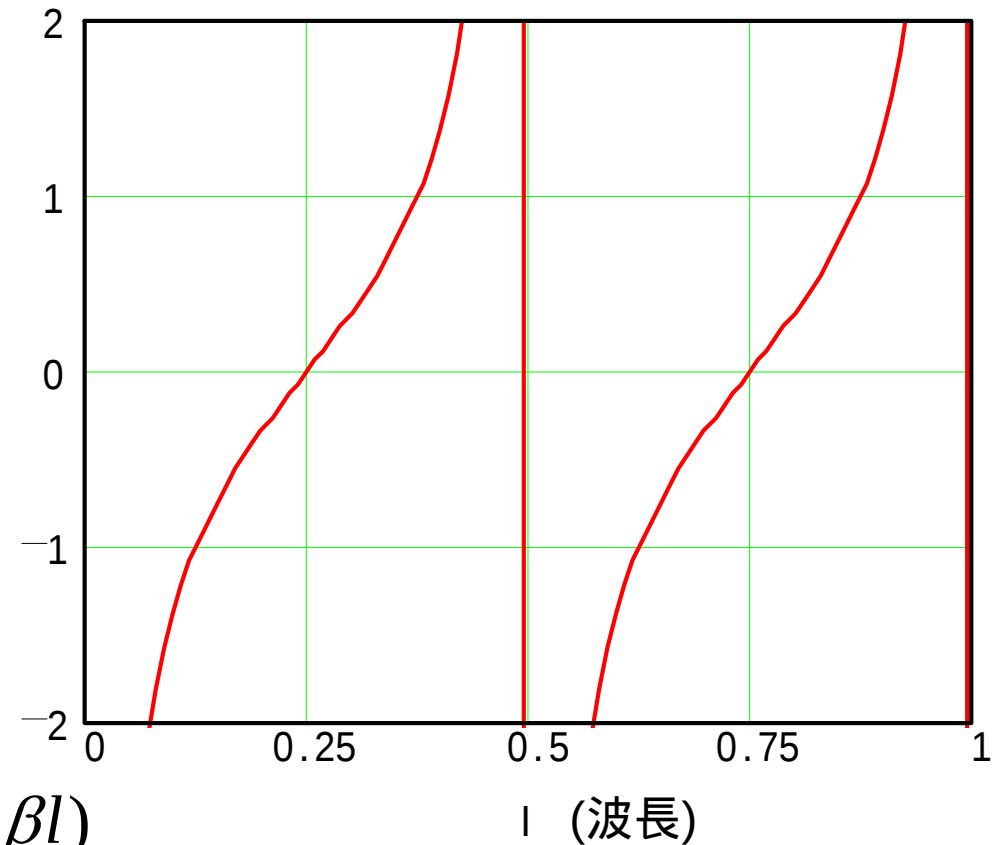
開放($\hat{Z}_l = \infty$)スタブの規格化リアクタンス ^{47/86}



$$\Gamma = \frac{\hat{Z}_l - 1}{\hat{Z}_l + 1} = +1$$

$$\Gamma(l) = \Gamma \exp(-2j\beta l) = +\exp(-2j\beta l)$$

$$\hat{Z}(l) = \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} = \frac{1 + \exp(-2j\beta l)}{1 - \exp(-2j\beta l)} = -j \cot \beta l \quad \hat{Y}(l) = \frac{1}{\hat{Z}(l)} = j \tan \beta l$$



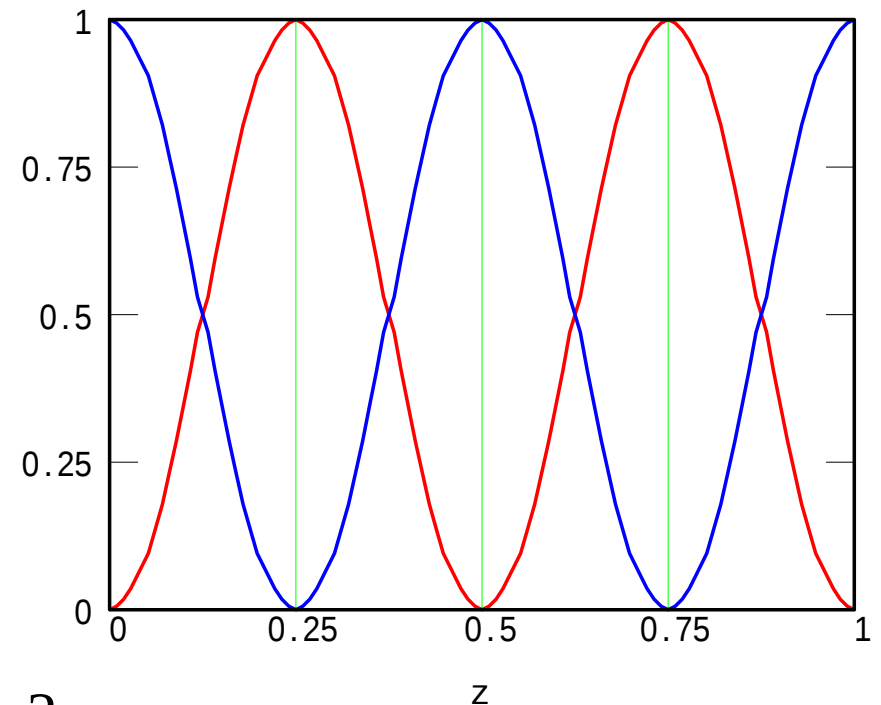
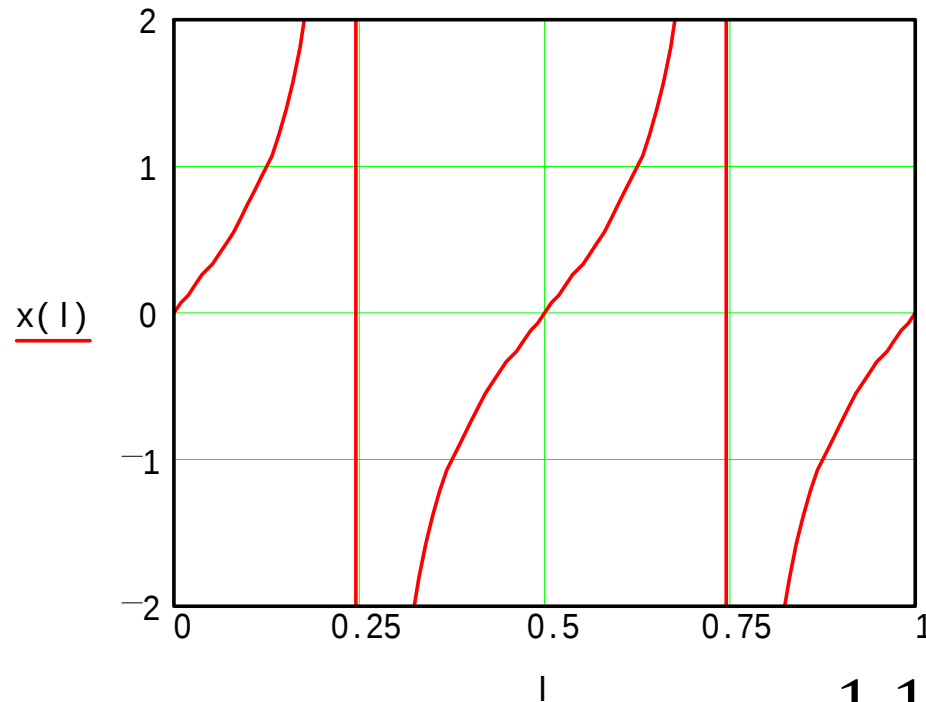
- $0 < l < 0.25\lambda \cdots$ キャパシタンス, $l = 0.25\lambda \cdots$ 直列共振
- $0.25\lambda < l < 0.5\lambda \cdots$ インダクタンス, $l = 0.5\lambda \cdots$ 並列共振

エネルギー観点での等価リアクタンス(短絡)

10/86

リアクタンス

エネルギー密度分布



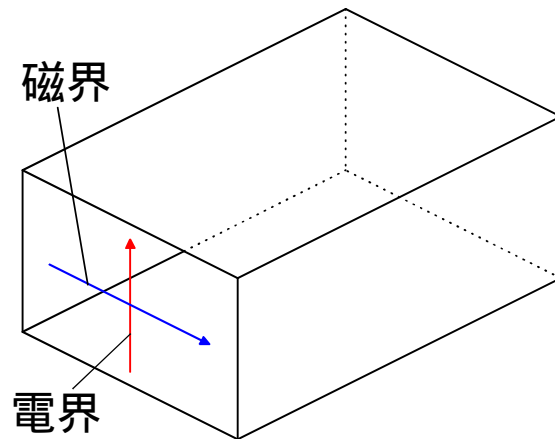
- 電気エネルギー密度 $w_e = \frac{1}{2} \frac{1}{2} C |V|^2$
- 磁気エネルギー密度 $w_m = \frac{1}{2} \frac{1}{2} L |I|^2$
- $0 < l < 0.25\lambda \cdots W_e < W_m$ インダクタンス, $l = 0.25\lambda \cdots W_e = W_m$ 共振
- $0.25\lambda < l < 0.5\lambda \cdots W_e > W_m$ キャパシタンス, $l = 0.5\lambda \cdots W_e = W_m$ 共振

(1個の「1/2」は振幅
が波高値のため)

等価リアクタンス例(金属導波管)

49/86

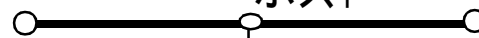
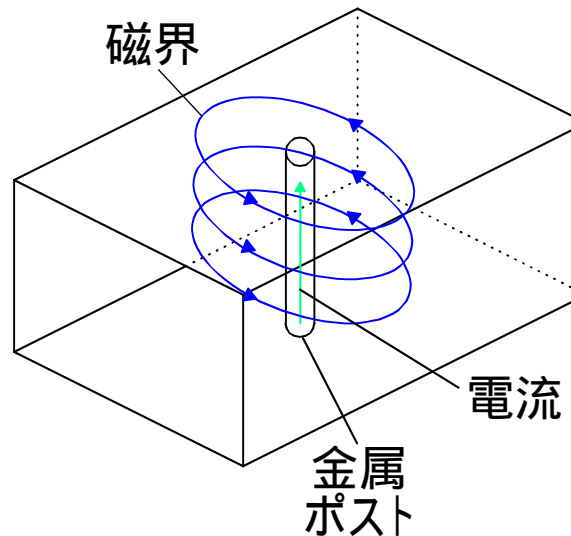
中空導波管



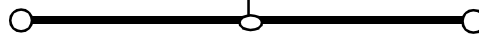
$$W_e = W_m$$



金属ポスト



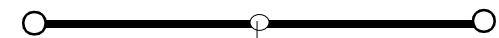
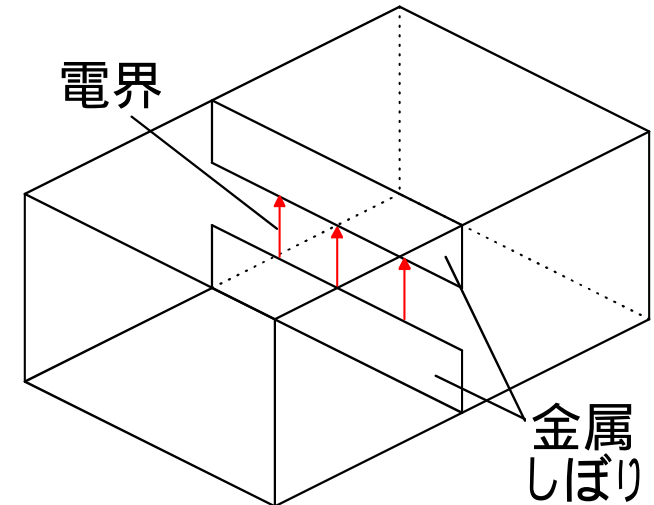
$$W_e < W_m \quad L$$



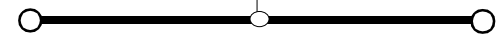
$$w_e = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \epsilon |E|^2$$

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \mu |H|^2$$

金属しぼり



$$W_e > W_m = C$$

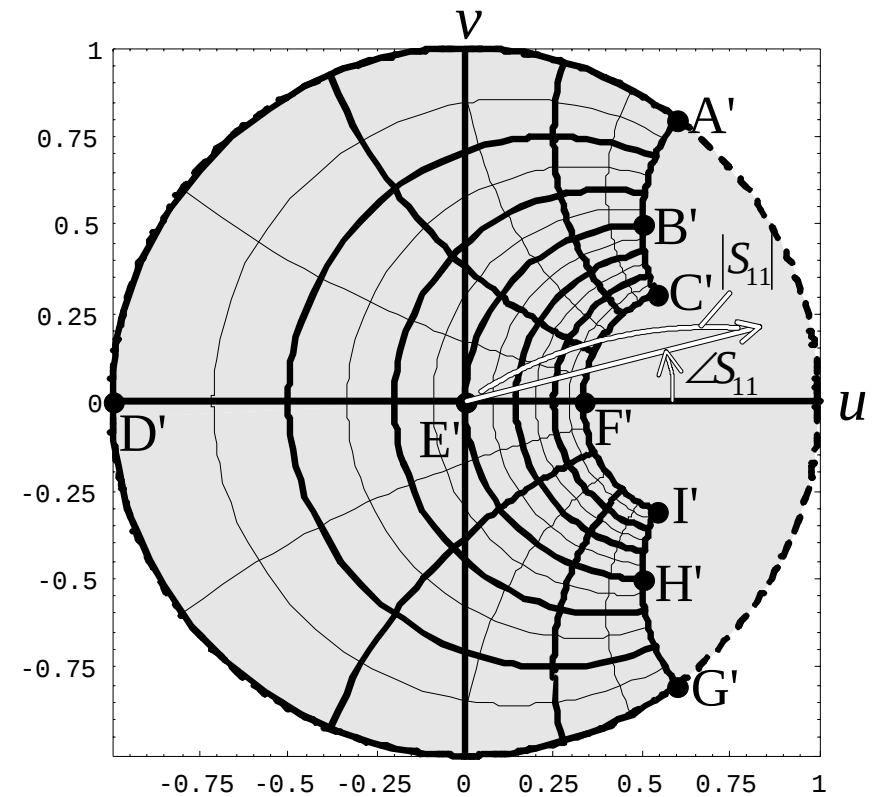
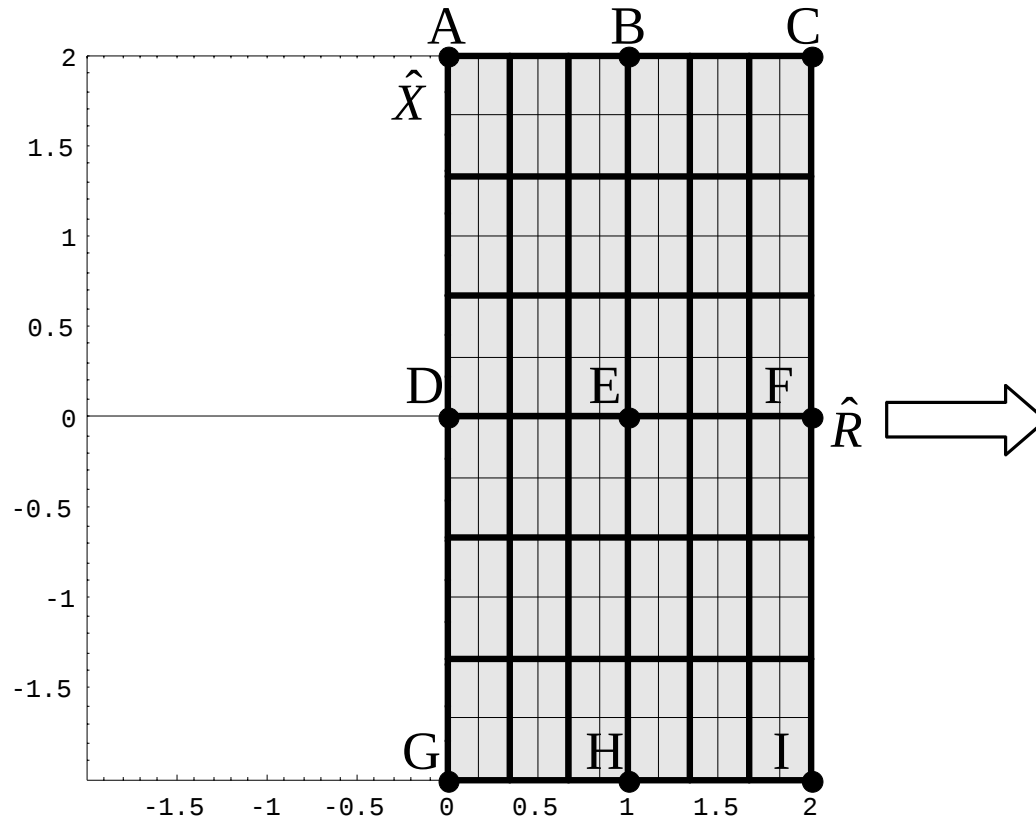


(1個の「1/2」は振幅が波高値のため)

• 電気エネルギー密度

• 磁気エネルギー密度

スミスチャート



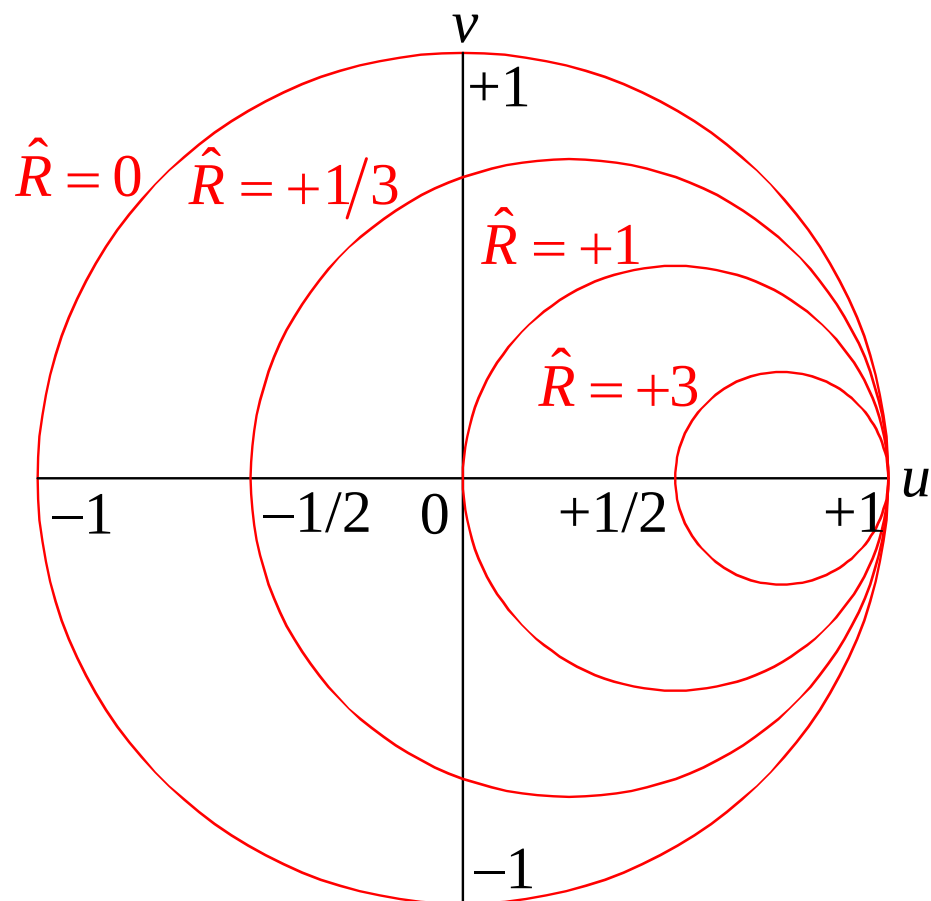
$$\hat{Z} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \quad \Gamma = \frac{\hat{Z}-1}{\hat{Z}+1}$$

- 規格化インピーダンス $\hat{Z} = \hat{R} + j\hat{X}$
と反射係数 $\Gamma = u + jv$

$$\begin{aligned} u + jv &= \frac{\hat{R} + j\hat{X} - 1}{\hat{R} + j\hat{X} + 1} = \frac{\hat{R} - 1 + j\hat{X}}{\hat{R} + 1 + j\hat{X}} \\ &= \frac{\hat{R}^2 + \hat{X}^2 - 1 + 2j\hat{X}}{(\hat{R} + 1)^2 + \hat{X}^2} \end{aligned}$$

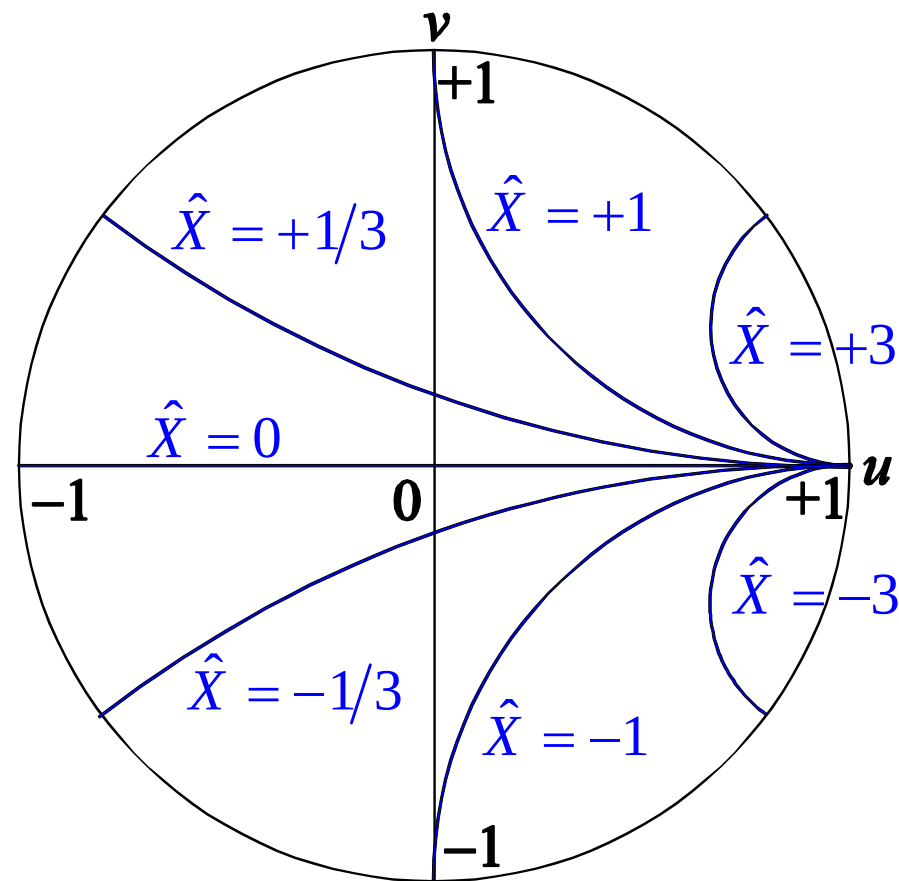
インピーダンスの実部と虚部

実部一定



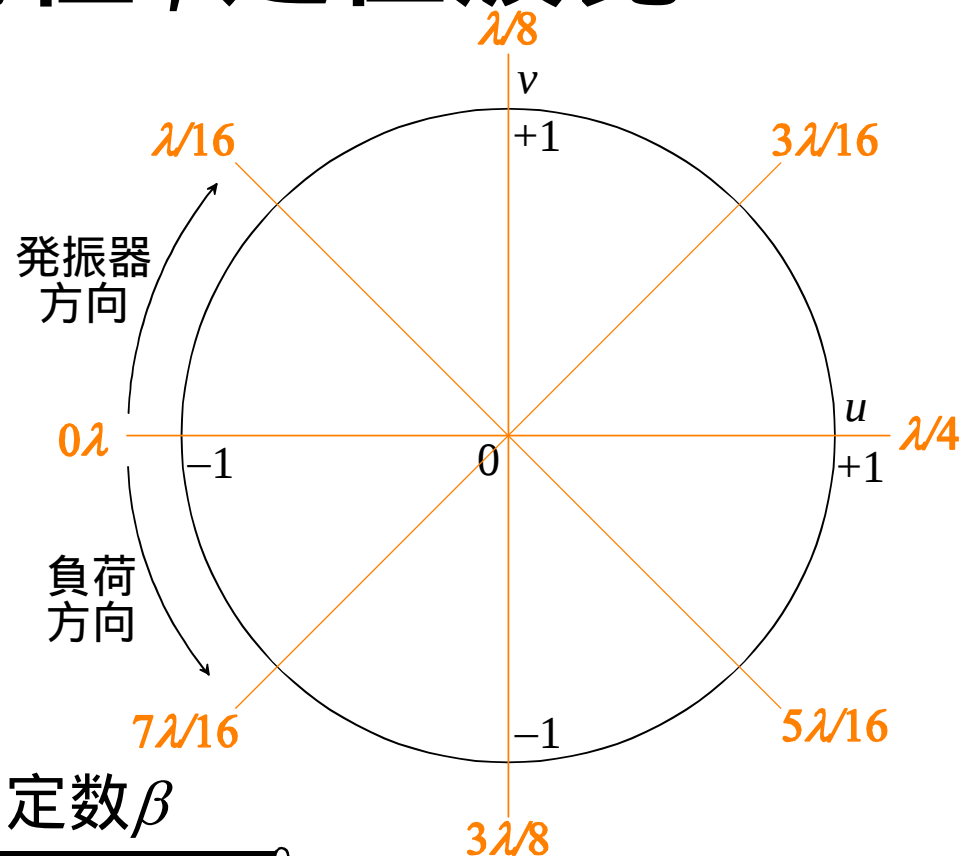
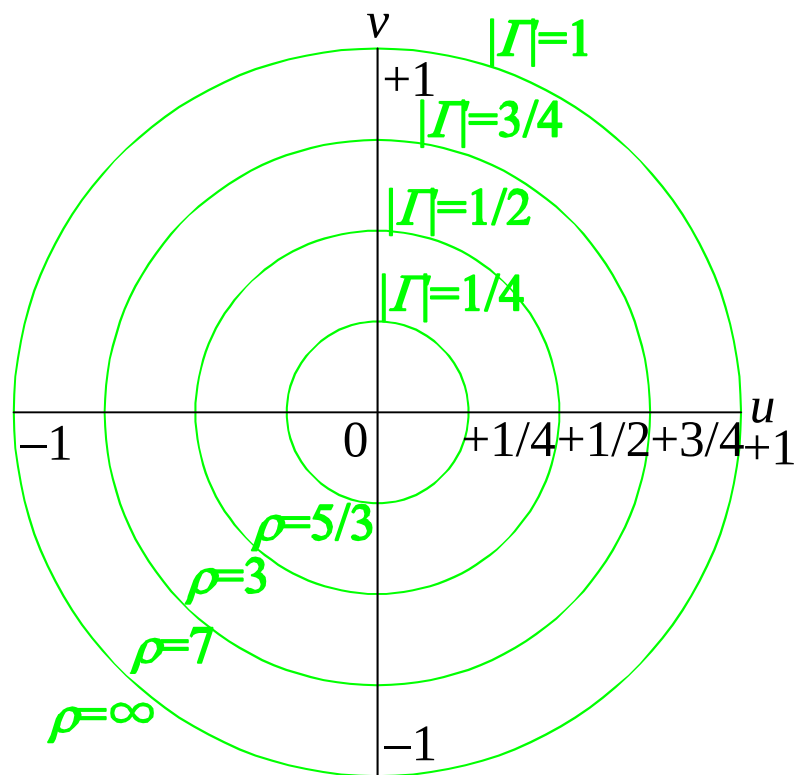
$$\left(u - \frac{\hat{R}}{\hat{R}+1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{\hat{R}+1}\right)^2$$

虚部一定



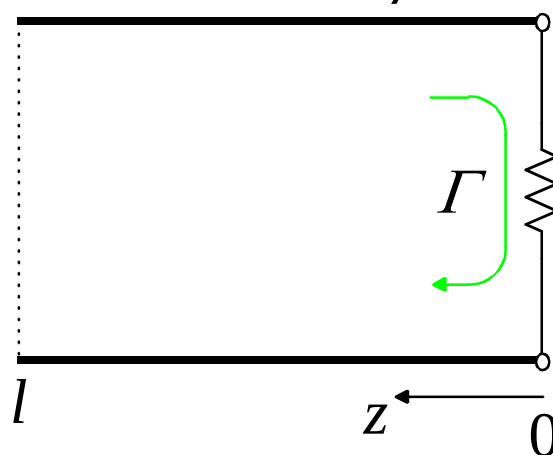
$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{\hat{X}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\hat{X}}\right)^2$$

反射係数絶対値，定在波比



$$\rho = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

$\Gamma(l)$

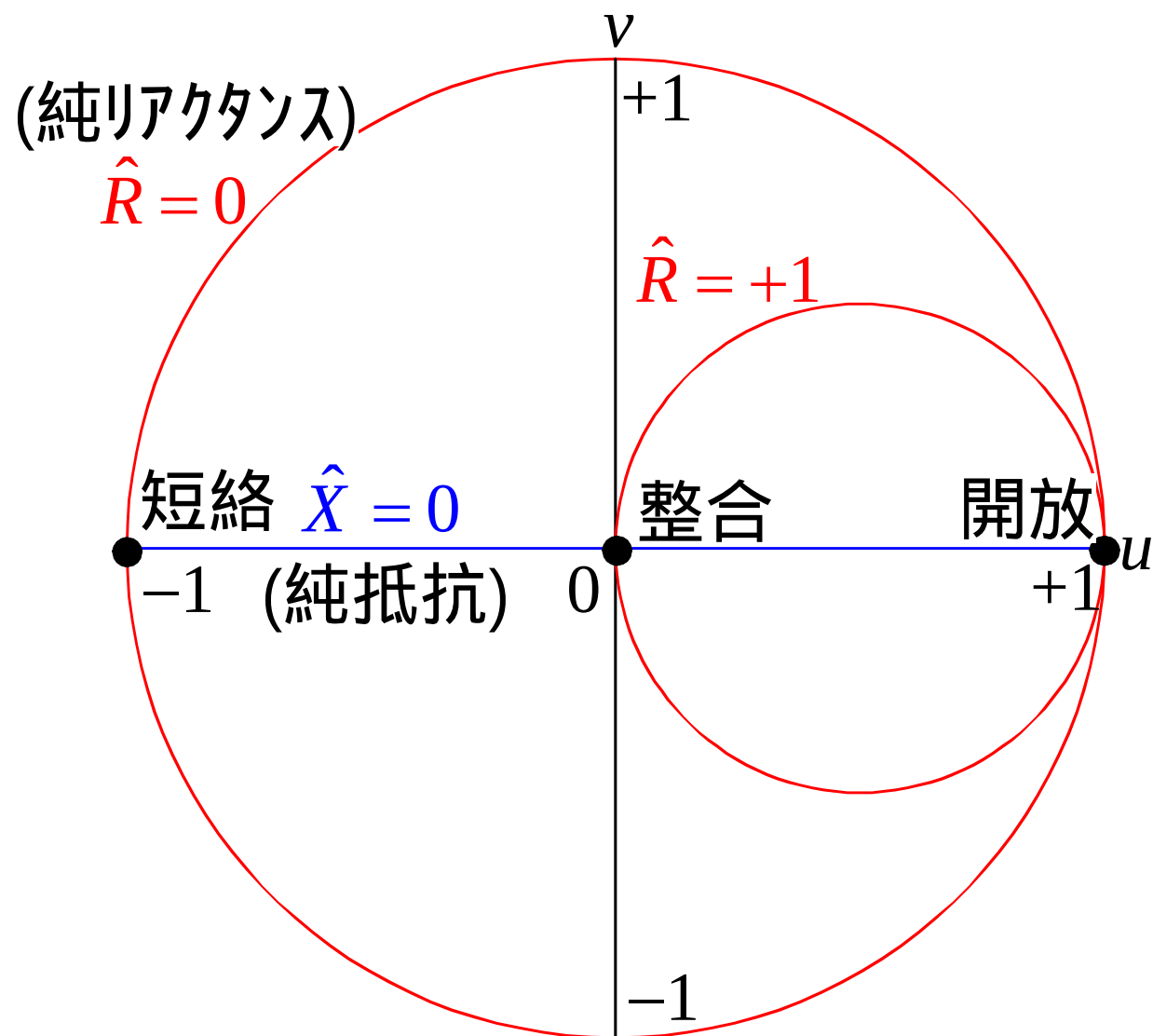


$$\Gamma(l) = \Gamma \exp(-2j\beta l)$$

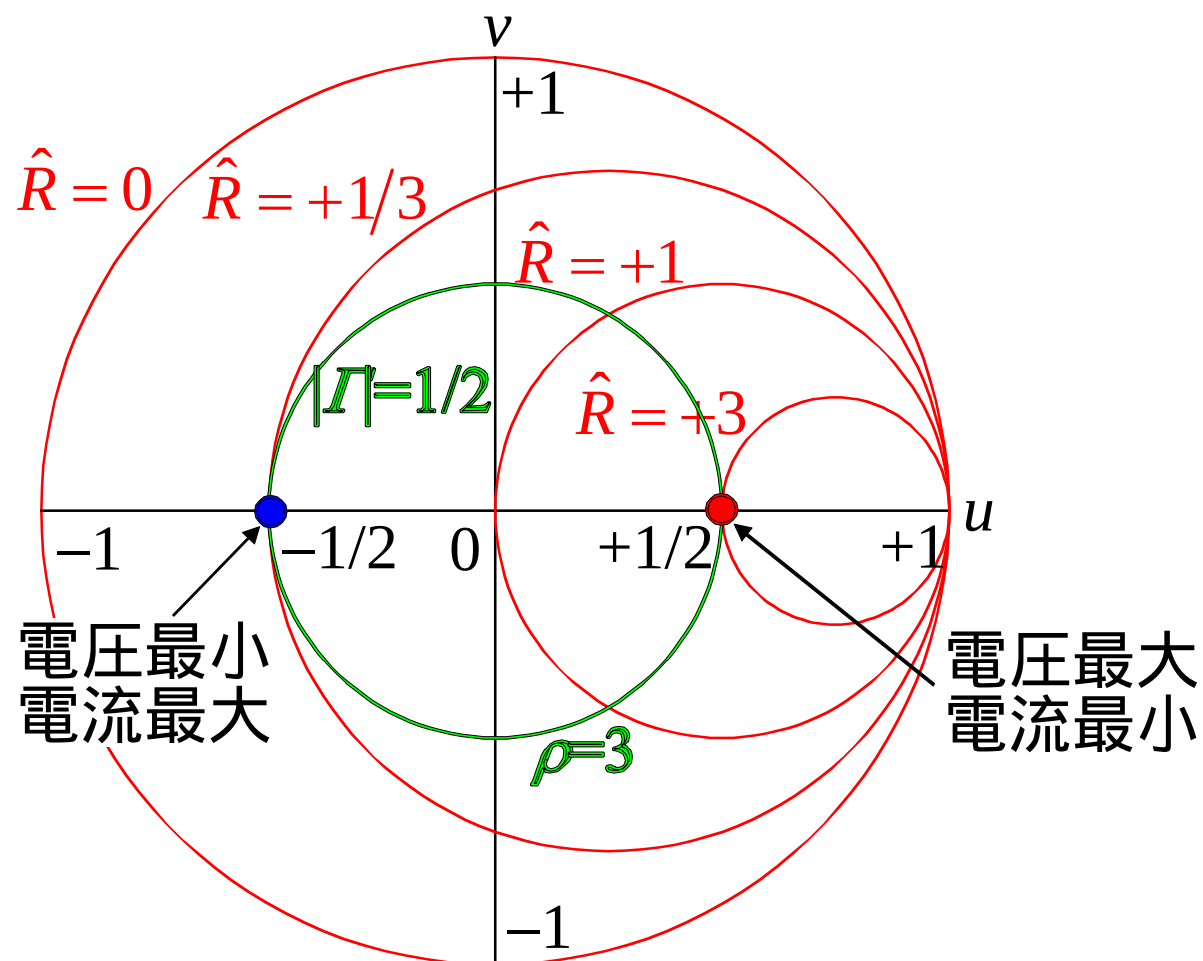
負荷

$$\Gamma\left(l + \frac{\lambda}{2}\right) = \Gamma(l)$$

特定のインピーダンスの位置

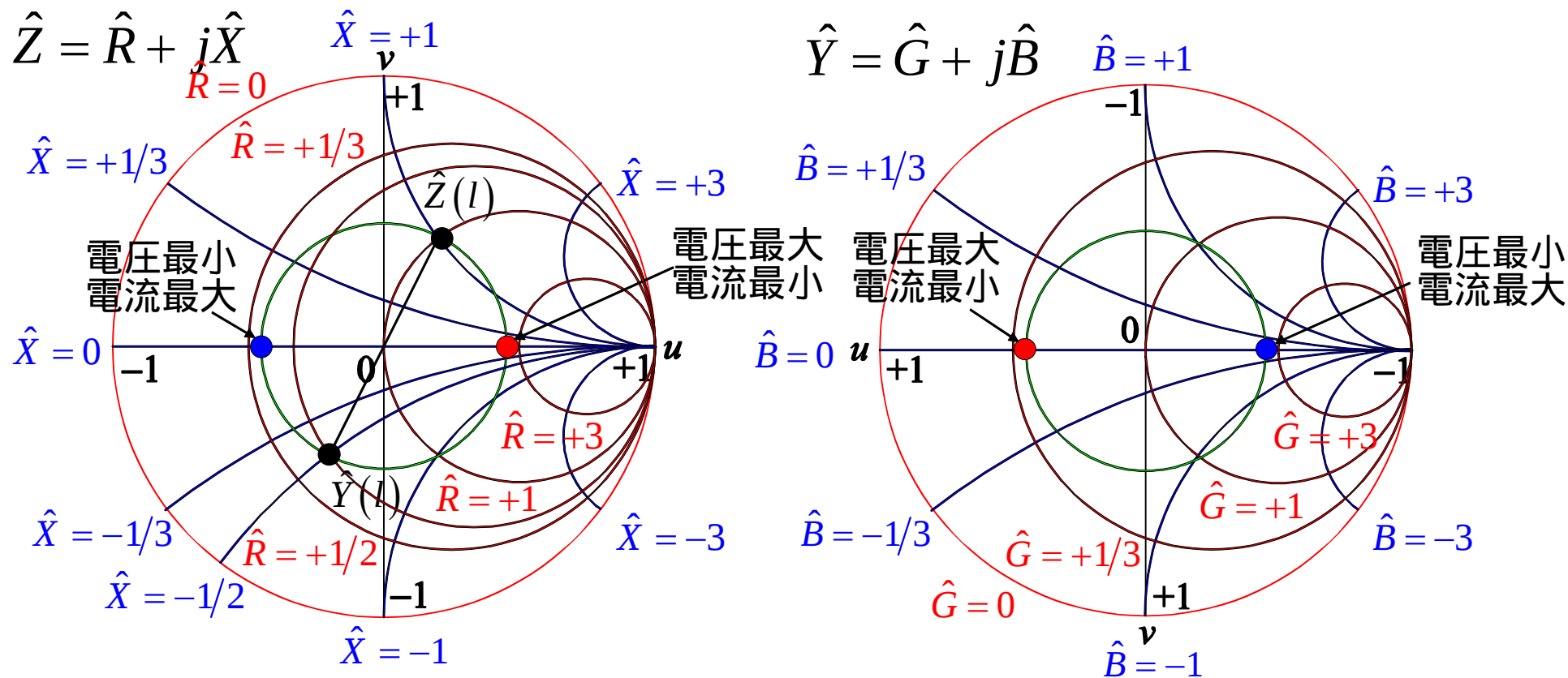


電圧(電流)最大(最小)点



- 正の実軸上・・・電圧最大,電流最小 $\hat{Z} = \rho$
- 負の実軸上・・・電圧最小,電流最大 $\hat{Z} = \frac{1}{\rho}$

インピーダンスとアドミタンス

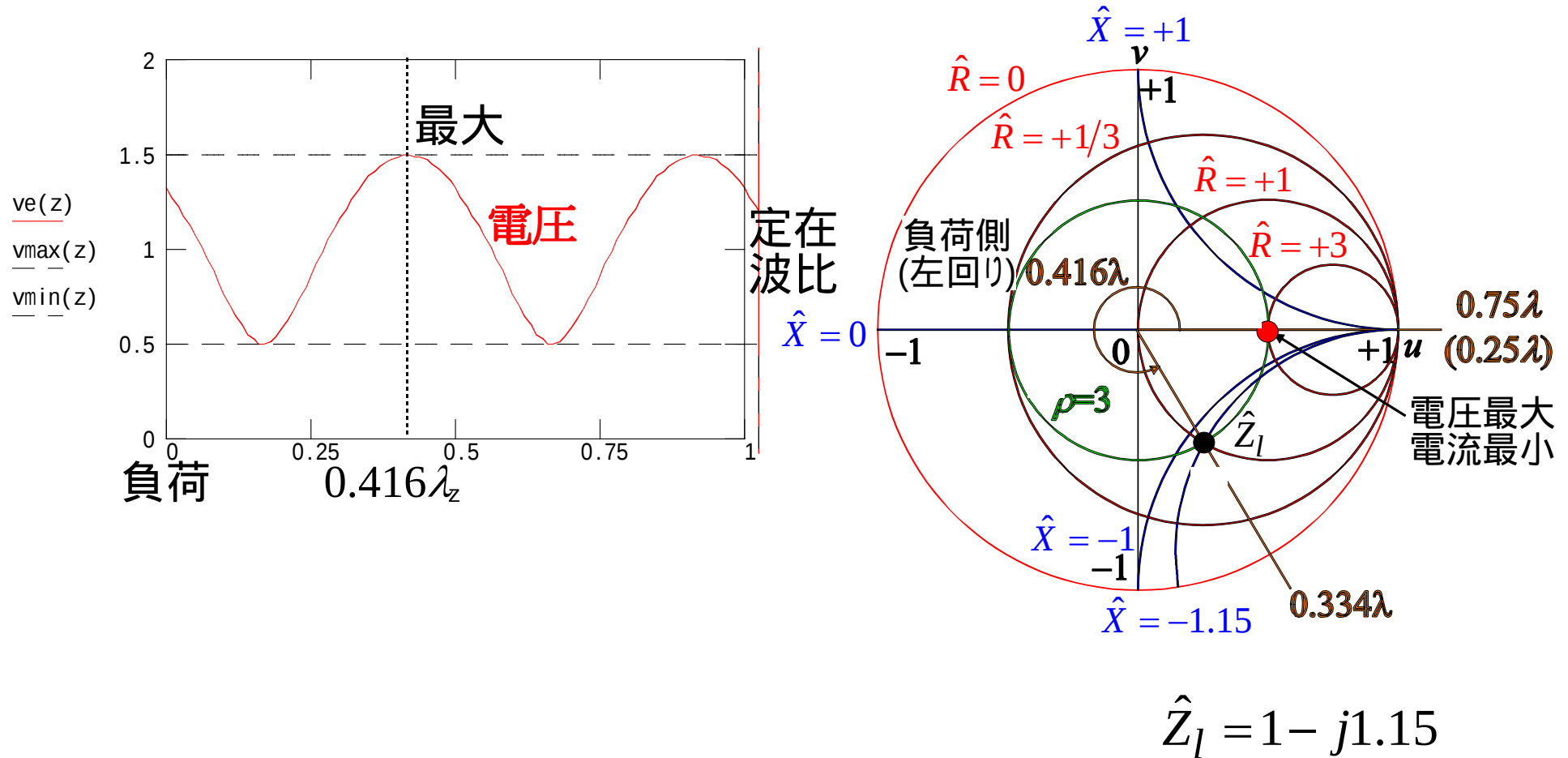


$$\hat{Z}(l) = 1 + j1 \quad \hat{Y}(l) = \frac{1}{1 + j1} = \frac{1 - j1}{2}$$

$$\Gamma(l) = \Gamma \exp(-2j\beta l) \quad \Gamma(l + \lambda/4) = -\Gamma(l)$$

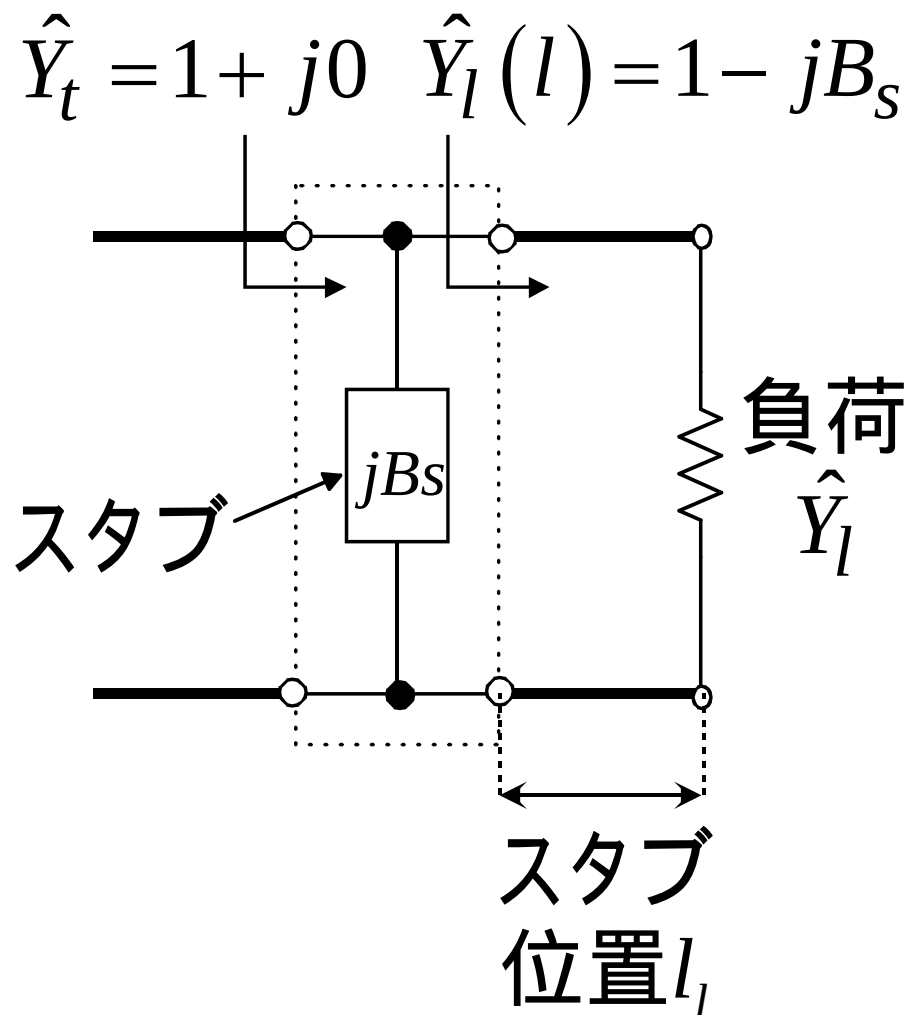
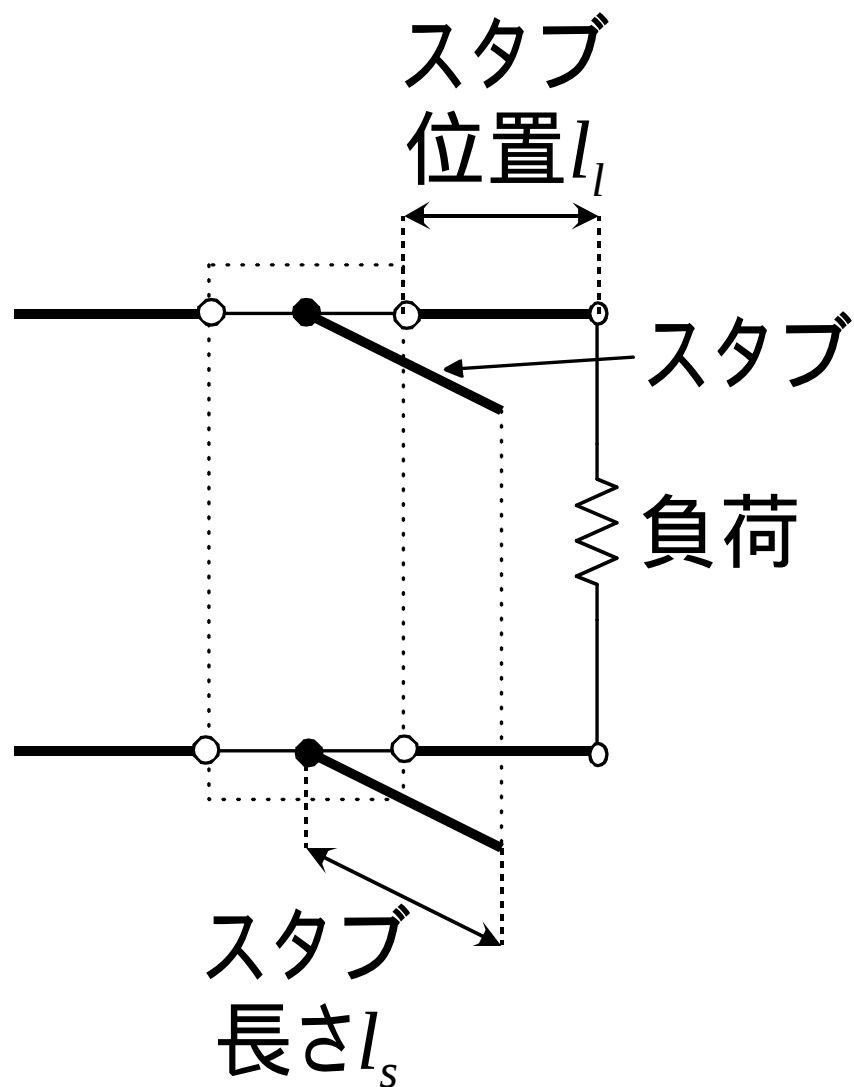
$$\hat{Z}(l) = \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} \quad \hat{Z}(l + \lambda/4) = \frac{1 + \Gamma(l + \lambda/4)}{1 - \Gamma(l + \lambda/4)} = \frac{1 - \Gamma(l)}{1 + \Gamma(l)} = \frac{1}{\hat{Z}(l)}$$

負荷インピーダンスの求め方



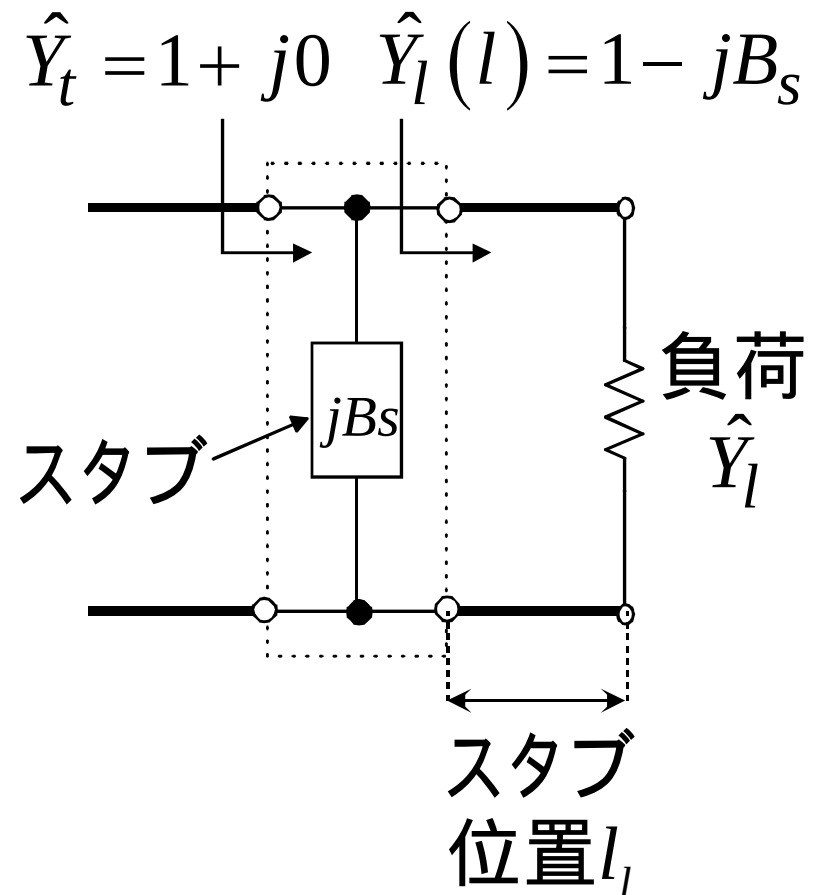
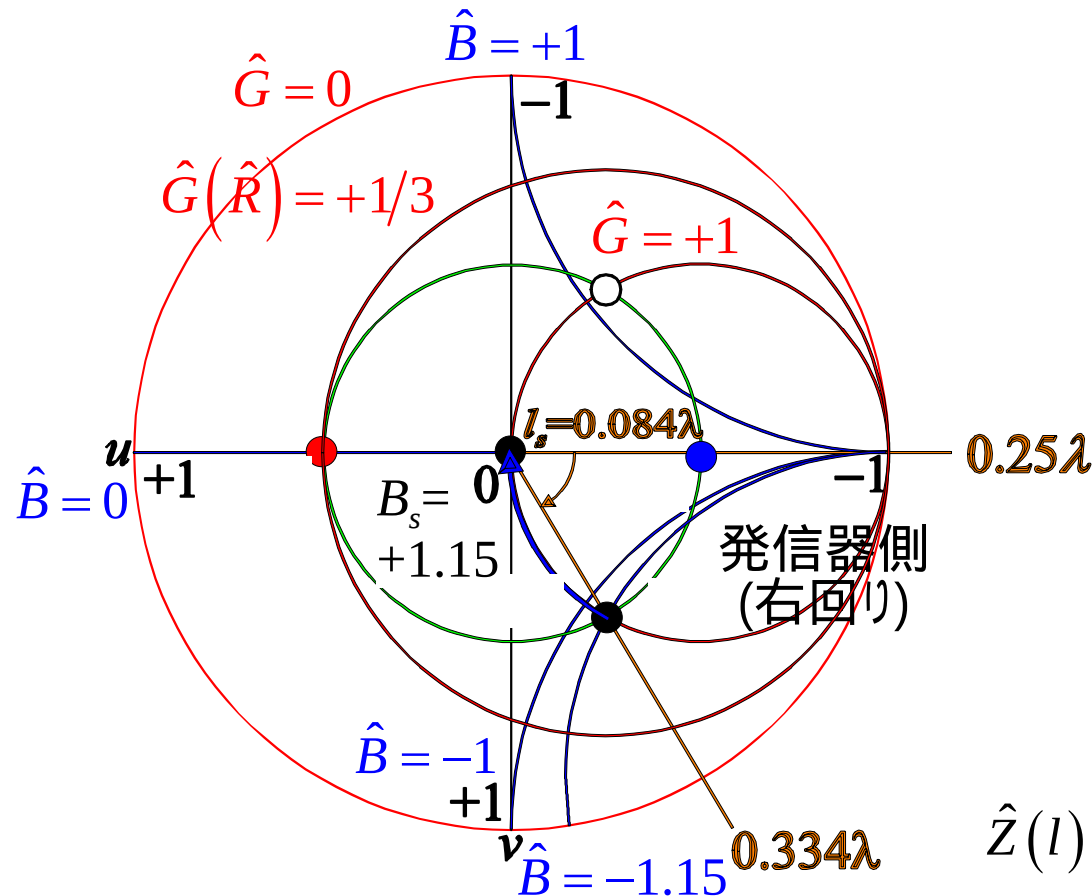
- 定在波比 $\rho=3$, 電圧最大位置 $l=0.416\lambda$

スタブによる整合の考え方



- 逆に負荷側へたどる

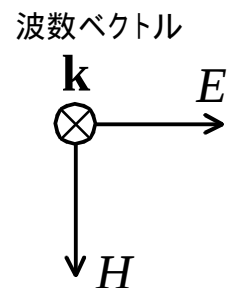
開放スタブによる整合



- 負荷インピーダンス $\hat{Z}_l = 1/3 + j0$
- 開放スタブサセプタンス $\hat{B}_s(l_s) = \tan \beta l_s = +1.15$
 $l_s = 0.136\lambda$

伝送線路

- 分類法
- 2 導体, 1 導体, 誘電体
- 閉鎖系, 開放系
- 平面, 立体

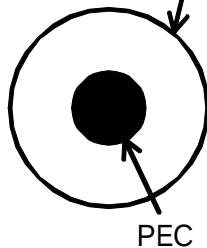


(a) 自由空間

PEC(金属)

(b) 平行二本線路
(レッヘル線路)

PEC

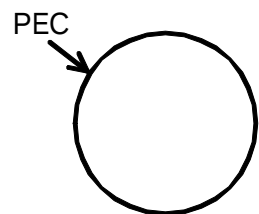


(c) 同軸線路

PEC



(d) 方形導波管



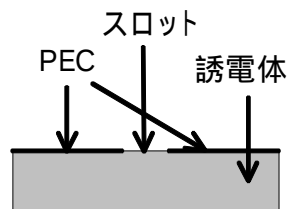
(e) 円形導波管

PEC 誘電体

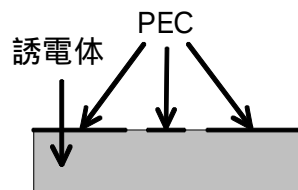


(f) マイクロストリップ線路

PEC 誘電体

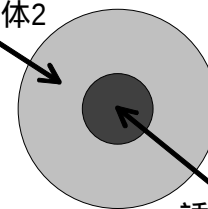
(g) ストリップ線路
(トリプレート線路)

(h) スロット線路



(i) コプレーナガイド

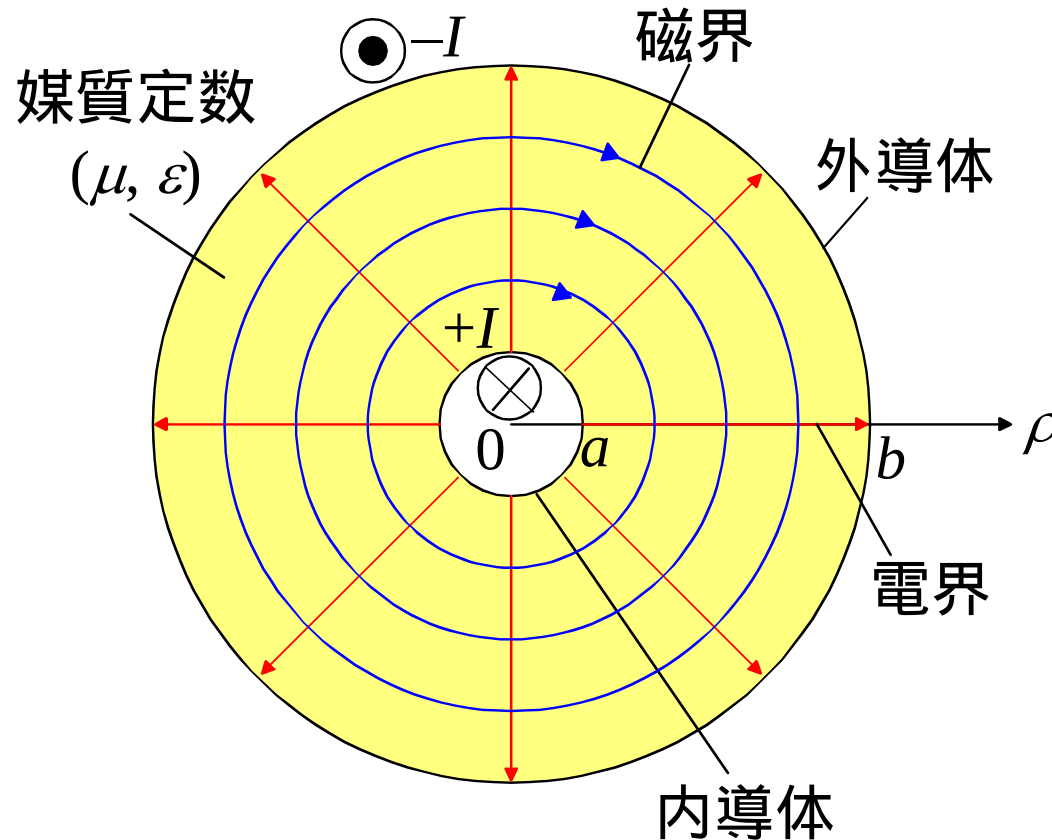
誘電体2



誘電体1

(j) 光ファイバ

同軸線路

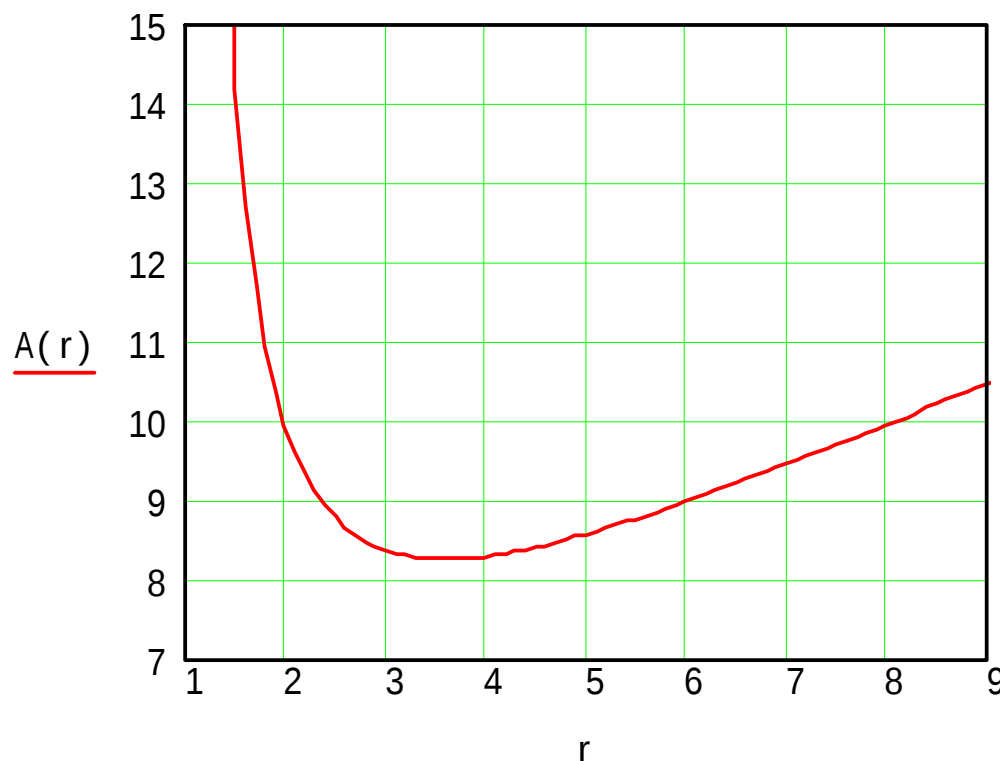


$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

- 同軸2導体, 導体間に誘電体(比誘電率 ϵ_r)充填
- 位相定数... $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \sqrt{\epsilon_r} k_0$, 波長 $\lambda = 2\pi / \beta = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_r}$
- 特性インピーダンス...
(形状比 b/a の関数) $Z_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \log \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{Z_0}{2\pi} \log \frac{b}{a}$

同軸線路の導体損失



減衰定数

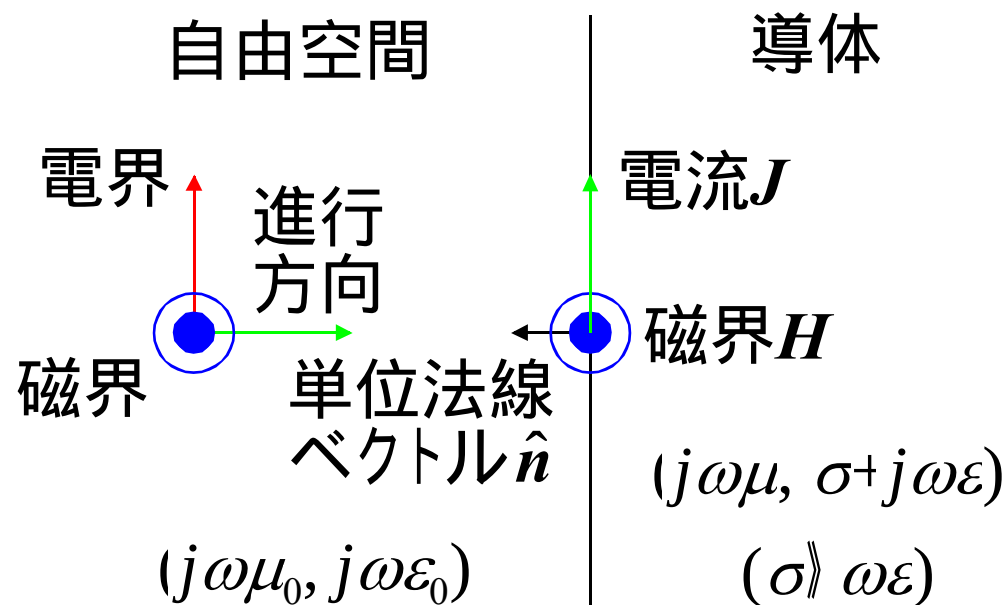
$$\alpha = \frac{R_s}{2 \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}}} \frac{1}{b} \frac{1 + \frac{b}{a}}{\log \frac{b}{a}}$$

R_s : 表面抵抗

$$A = \frac{1 + \frac{b}{a}}{\log \frac{b}{a}}$$

- $b/a=3.59$ で $A=8.27$ で最小(ϵ_r に依らない)
- $\epsilon_r=1.0$ のとき $Z_c=76.7\Omega \rightarrow 75\Omega$
- $\epsilon_r=2.2$ (ポリエチレン)のとき $Z_c=50.6\Omega \rightarrow 50\Omega$ (特性インピーダンスの標準値)
- 減衰定数 $\alpha \propto b$ ((外)導体半径)に反比例

導体への入射



- 平面波が垂直に入射
- 表皮の厚さ…振幅が $1/e$ になる深さ

銅 $\sigma = 58 \times 10^6 [\text{S/m}]$

周波数 1GHz のとき

$\delta = 2.1 \mu\text{m}$

伝搬定数

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_0 \cdot j\omega\epsilon_0} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \simeq \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu\sigma}$$

波動インピーダンス

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{j\omega\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$Z_m = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \simeq \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

減衰定数

$$\alpha \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

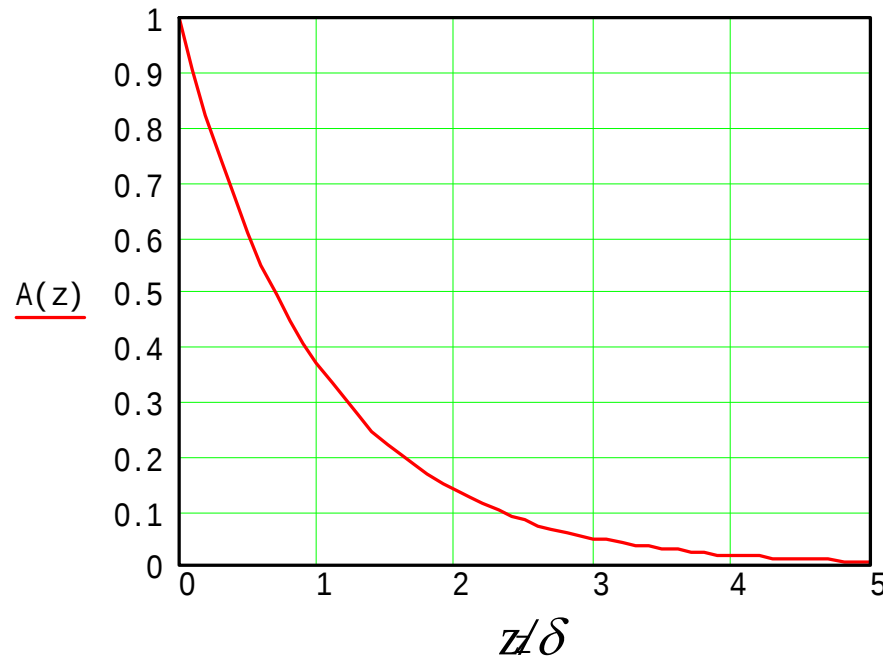
表皮の厚さ

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

表面抵抗

$$R_s \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\delta\sigma}$$

導体での損失



- 導体での消費電力・・・表皮の厚さ δ までの一様な消費電力と同じ
- 振幅が波高値であることに注意。
- 実用上 5δ までとれば問題ない($-8.68 \times 5 = -43.4\text{dB}$)

$$\begin{aligned}
 P_l &= \int_0^\infty E(z) J(z)^* dz = \int_0^\infty \sigma |E(z)|^2 dz \\
 &= \sigma |E(0)|^2 \int_0^\infty \exp(-2\alpha z) dz = \frac{\sigma}{2\alpha} |E(0)|^2 \\
 &= \frac{\sigma \delta}{2} |E(0)|^2 = \frac{1}{2R_s} |E(0)|^2 = \frac{1}{2} R_s |H(0)|^2
 \end{aligned}$$

誘電体損失

- 複素誘電率 $\epsilon'' = \epsilon - j\epsilon' = \epsilon(1 - j\tan\delta)$
- 誘電正接 $\tan\delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$

PTFE(テフロン) $\epsilon_r = 2.1$, $\tan\delta = 2 \times 10^{-4}$, 1GHz

- 伝搬定数(TEM線路)

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon(1 - j\tan\delta)} \approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 - j\frac{1}{2}\tan\delta\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\omega\sqrt{\mu\epsilon}\tan\delta \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

伝送線路の(振幅)減衰定数

- 伝送電力(S は線路断面)

$$P = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} \right) \propto \exp(-2\alpha z)$$

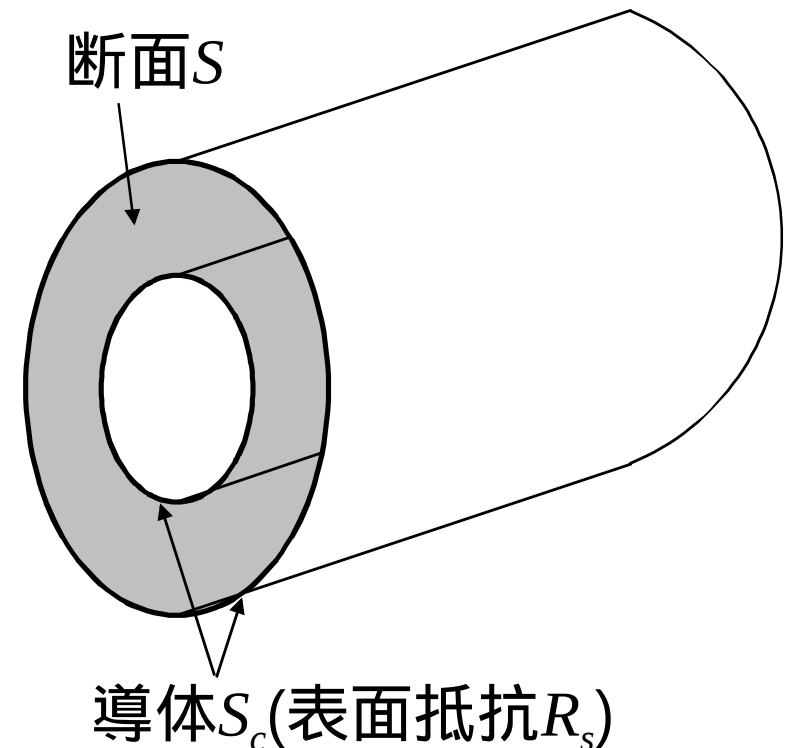
- 損失電力=伝送電力の単位長さあたりの減衰量

$$P_l = -\frac{\partial P}{\partial z} = 2\alpha P \quad \alpha = \frac{P_l}{2P}$$

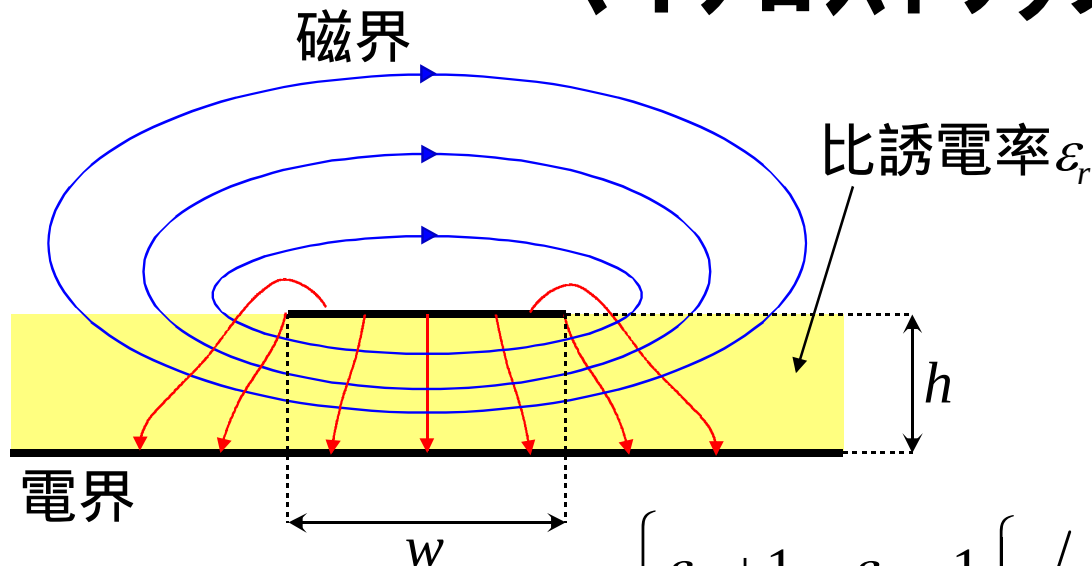
- 導体による損失(S_c は断面導体)

$$P_l = \frac{1}{2} R_s \int_{S_c} |\mathbf{H}|^2 dl$$

(1/2は振幅が波高値のため)



マイクロストリップ線路



• 波長 $\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}}$

• 誤差1%以内

• 等価比誘電率

$$\epsilon_{\text{eff}} = \begin{cases} \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left\{ 1 / \sqrt{1 + 12 \frac{h}{w}} + 0.04 \left(1 - \frac{w}{h} \right)^2 \right\} & \left(\frac{w}{h} \leq 1 \right) \\ \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} / \sqrt{1 + 12 \frac{h}{w}} & \left(\frac{w}{h} \geq 1 \right) \end{cases}$$

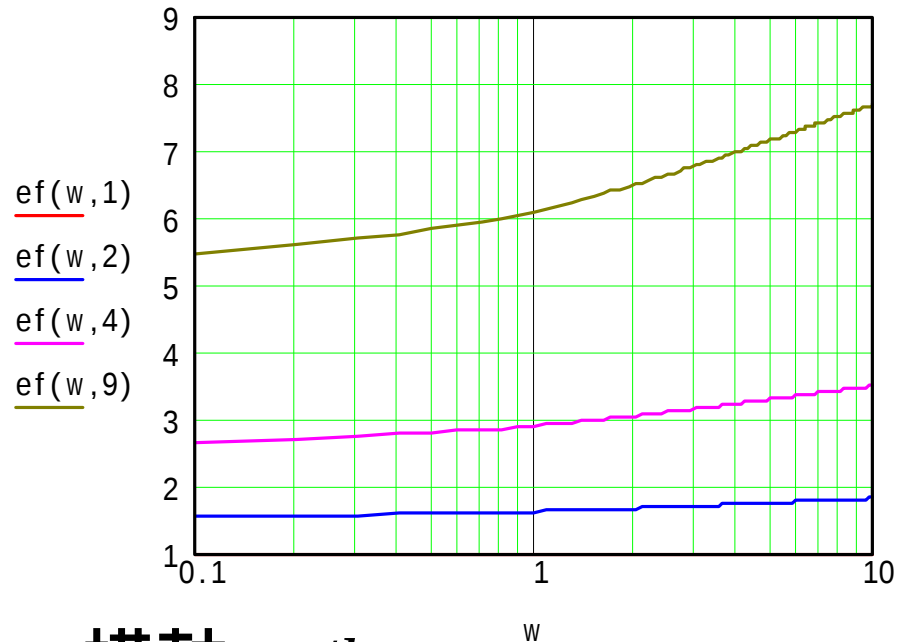
• 特性インピーダンス

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

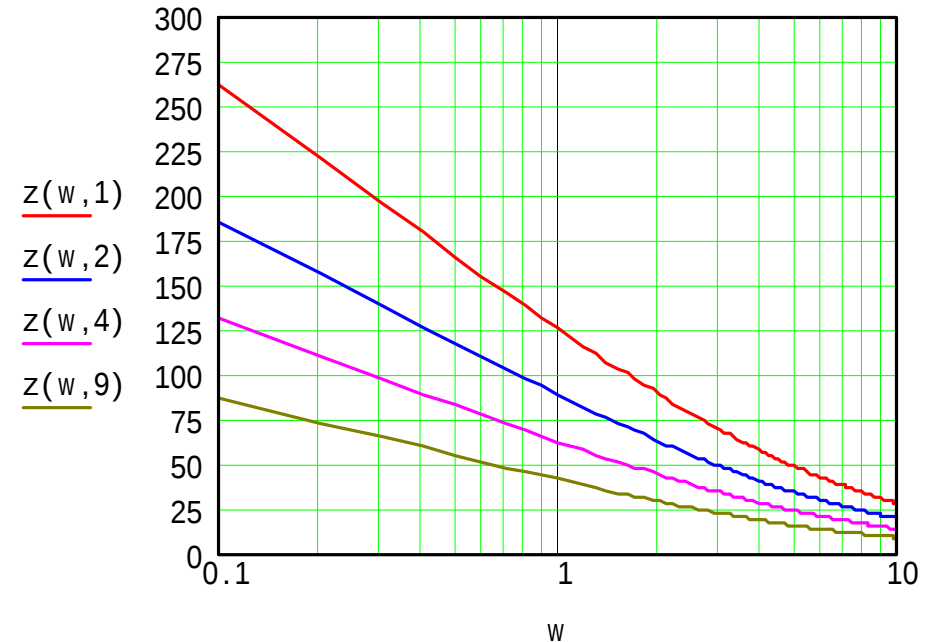
$$Z_c = \begin{cases} \frac{Z_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \log \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right) & \left(\frac{w}{h} \leq 1 \right) \\ \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}} \left\{ \frac{w}{h} + 1.393 + 0.667 \log \left(\frac{w}{h} + 1.444 \right) \right\}} & \left(\frac{w}{h} \geq 1 \right) \end{cases}$$

マイクロストリップ線路の特性インピーダンス^{67/86}

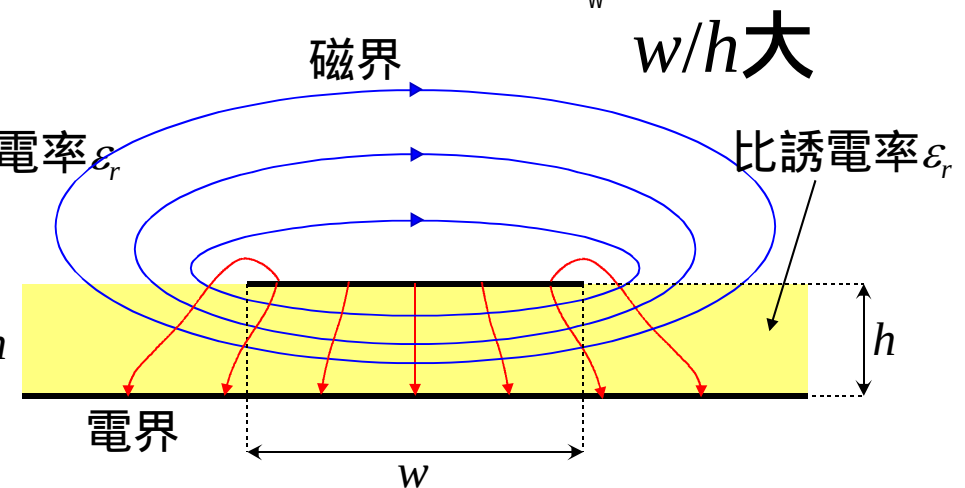
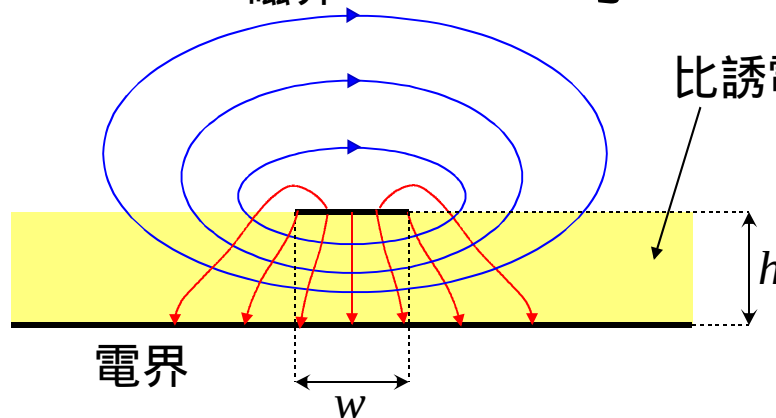
実効比誘電率



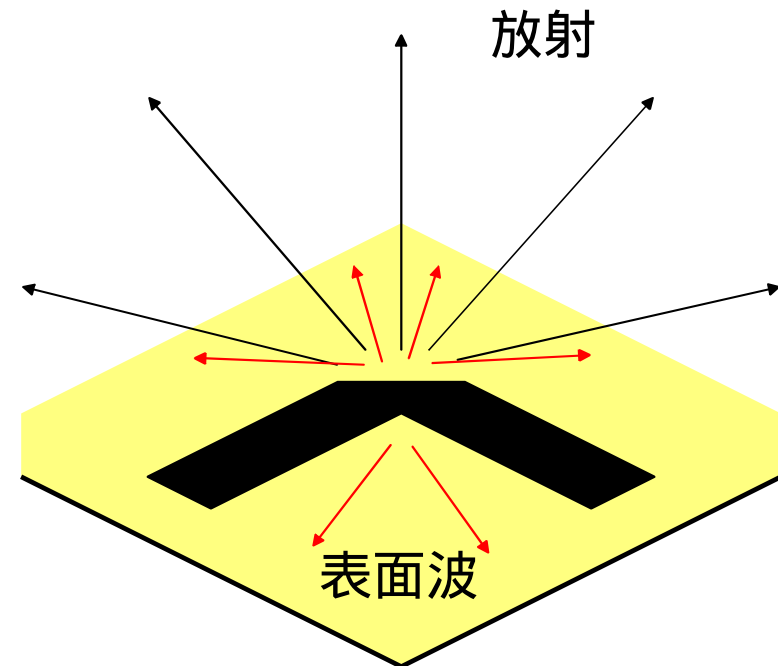
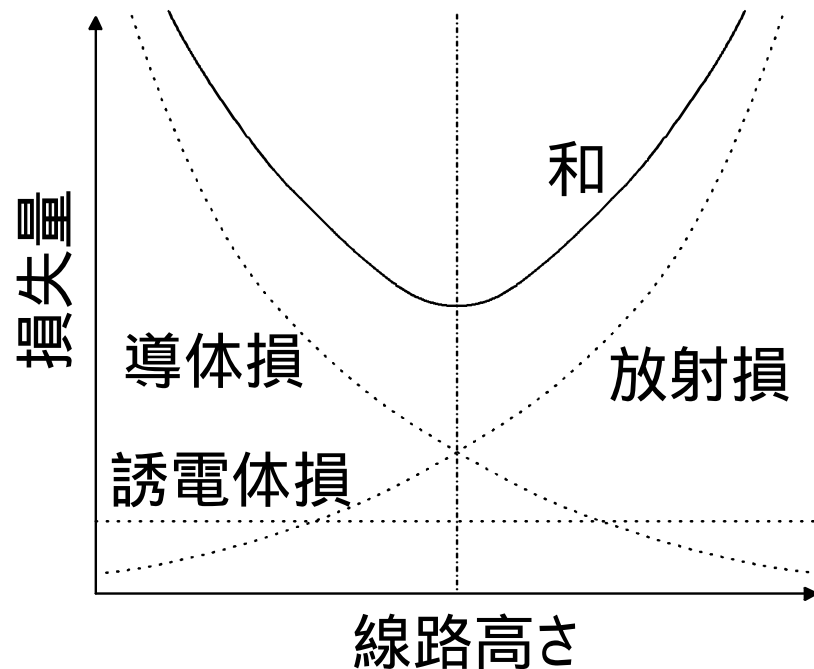
特性インピーダンス



- 横軸: w/h 磁界 w/h 小



マイクロストリップ^o 線路の損失



- 誘電体損・・・線路高さ h に依らず一定
- 導体損・・・線路高さ h に対し単調に減少
- 放射損・・・開放型線路, 曲がりと分岐で発生
外部への放射, 誘電体内での伝搬(表面波)
線路高さ h に対し単調に増加
- 損失の和・・・ある高さ h で最小値を持つ

+z方向伝搬電磁界

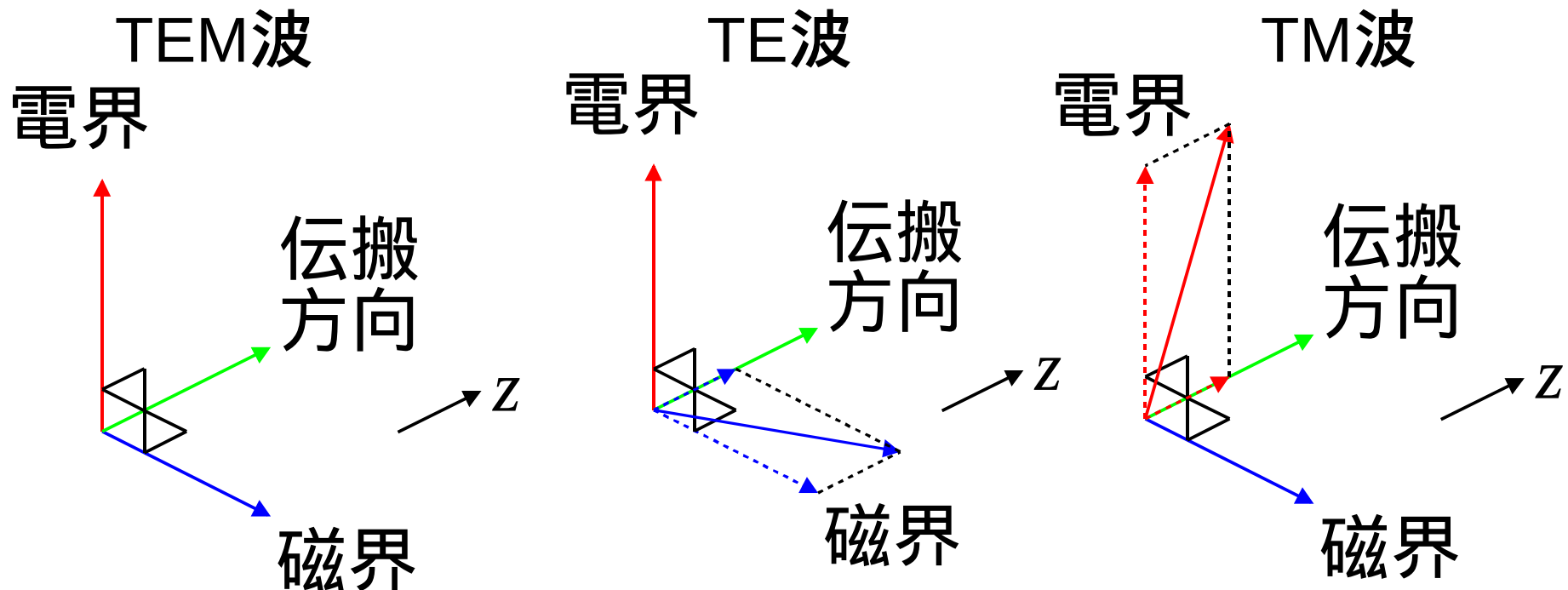
- 時間変化 $\exp(+j\omega t) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = j\omega$
- +z方向伝搬 $\exp(-\gamma z) \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$
- E_z に関する方程式(TM波) $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -k_c^2 E_z$
- H_z に関する方程式(TE波) $\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -k_c^2 H_z$
- (カットオフ波数(断面形状で決まる)) $k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon = \gamma^2 + k^2$
- 他の成分... E_z と H_z の関数

$$E_x = \frac{1}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad H_x = \frac{1}{k_c^2} \left(+j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

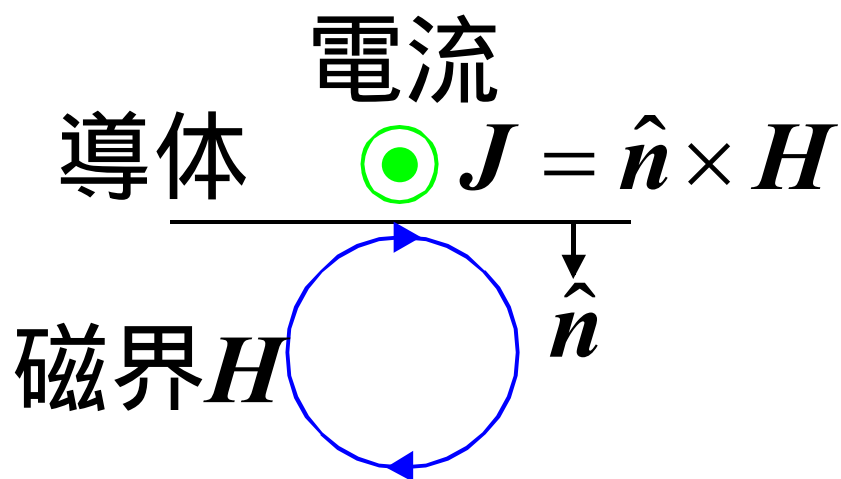
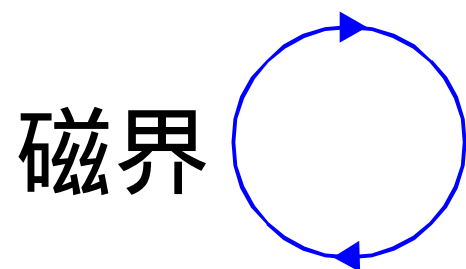
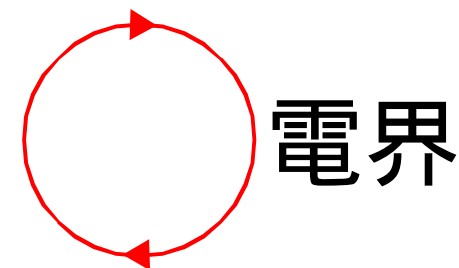
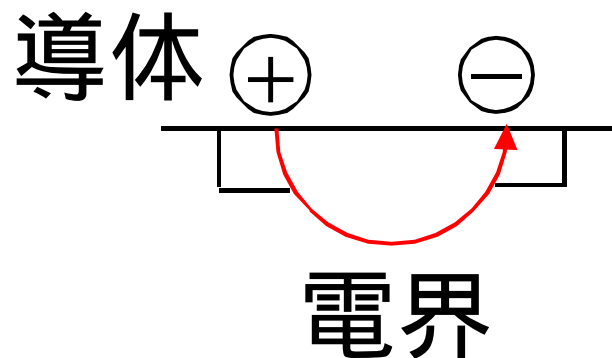
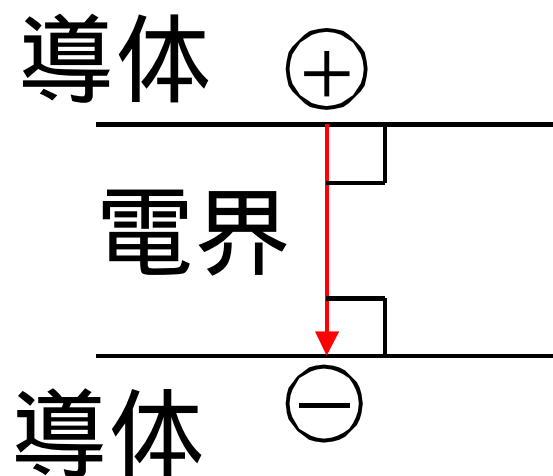
$$E_y = \frac{1}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad H_y = \frac{1}{k_c^2} \left(-j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

+z方向伝搬電磁界の分類

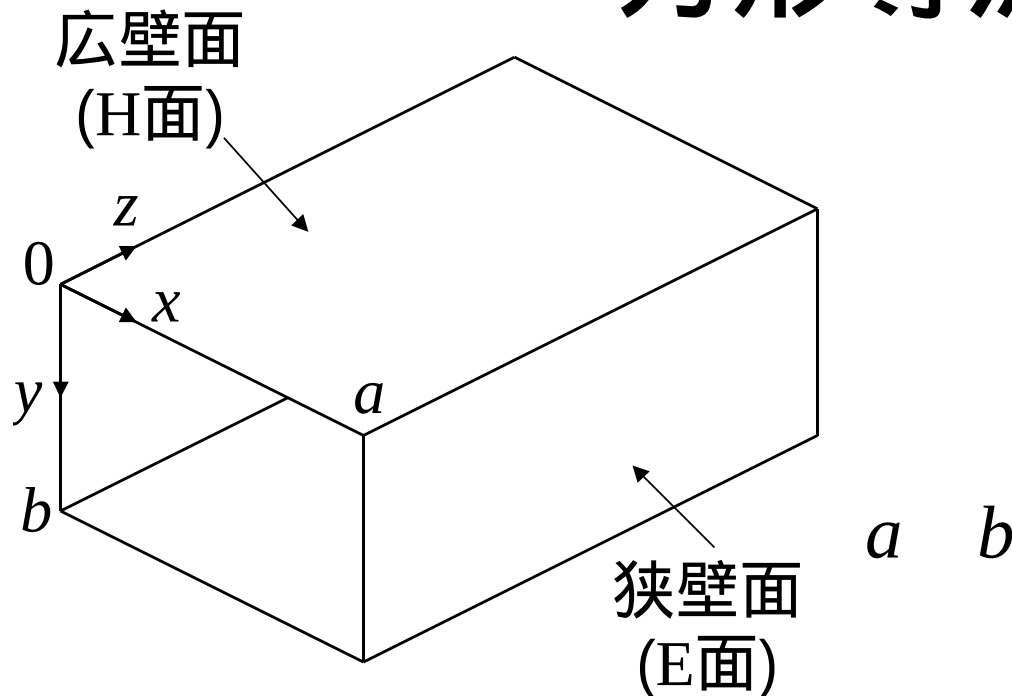
1. $E_z=0, H_z=0 \rightarrow$ TEM波(Transverse ElectroMagnetic Wave)
2. $E_z=0, H_z \neq 0 \rightarrow$ TE波(Transverse Electric Wave)
3. $E_z \neq 0, H_z=0 \rightarrow$ TM波(Transverse Magnetic Wave)



導体境界条件



方形導波管



- 境界条件・・・導体上で電界の接線成分が0
 $x=0, a$ で $E_y=0, E_z=0$ かつ $y=0, b$ で $E_x=0, E_z=0$

- 微分方程式 $\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0$ TE波

$$k_c^2 = \gamma^2 + k^2 \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0 \quad \text{TM波}$$

TE_{mn}モード

$$E_z = 0$$

$$H_z = H_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} H_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} H_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

$$H_x = \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} H_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

$$H_y = \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} H_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

$$= k^2 + \gamma^2$$

- m, n は0または自然数(ただし, 同時に0にはならない)
 ← x, y 成分が存在する
- H_{mn} は定数, $+z$ 方向依存性 $\exp(-\gamma z)$ は省略

TM_{mn}モード

$$H_z = 0$$

$$E_z = E_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} E_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} E_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$E_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} E_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} E_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

$$= k^2 + \gamma^2$$

- m, n は自然数 ← x, y 成分が存在する
- E_{mn} は定数, $+z$ 方向依存性 $\exp(-\gamma z)$ は省略

伝搬定数

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2} \quad k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

- $k_c^2 < k^2$ のとき, $\gamma = j\beta$ ・・・伝搬モード
- $k_c^2 > k^2$ のとき, $\gamma = \alpha$ ・・・減衰モード
- k_c ・・・カットオフ(cutoff: 遮断)波数
- カットオフ波長 λ_c (f_c =カットオフ周波数, c =光速)

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{c}{f_c} \left(= \frac{2a}{\sqrt{m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2}} \right)$$

- 管内(guided)波長 $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \geq \lambda$

単一モード条件

- TE_{10} モードだけが伝搬(基本モード:カットオフ波数が最小), 他のモード($TE_{20}, TE_{01}, TE_{11}, TM_{11} \dots$:高次モード)が減衰
- $\lambda_{c10}=2a>\lambda, \lambda_{c20}=a<\lambda, \lambda_{c01}=2b<\lambda \quad \lambda/2<a<\lambda, b<\lambda/2$
- $a<\lambda/2$ では伝搬しない。
...1導体系ではTEM波は伝搬しない。
- 標準導波管... $a=2b$

TE₁₀モードの表現式

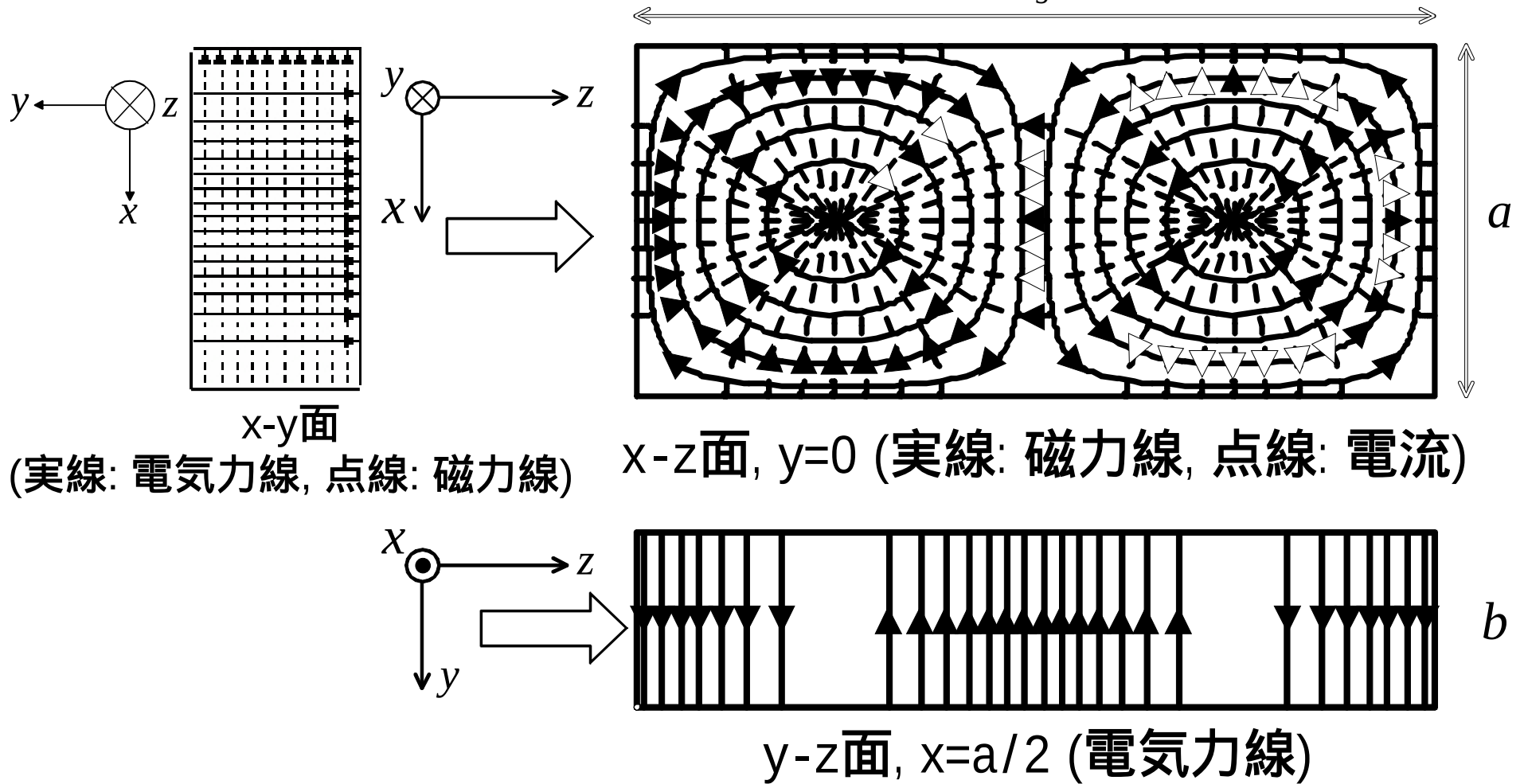
$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{\pi/a} H_{10} \sin \frac{\pi}{a} x \quad H_x = \frac{j\beta_g}{\pi/a} H_{10} \sin \frac{\pi}{a} x \quad H_z = H_{10} \cos \frac{\pi}{a} x$$

$$E_z = E_x = H_y = 0 \quad \beta_g = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} > \lambda$$

- H_{10} は定数, +z方向依存性 $\exp(-j\beta_g z)$ は省略
- y方向一様
- x方向分布
- E_y, H_x はsin分布, H_z はcos分布
- E_y, H_x はjがあり, H_z より90度位相が進む

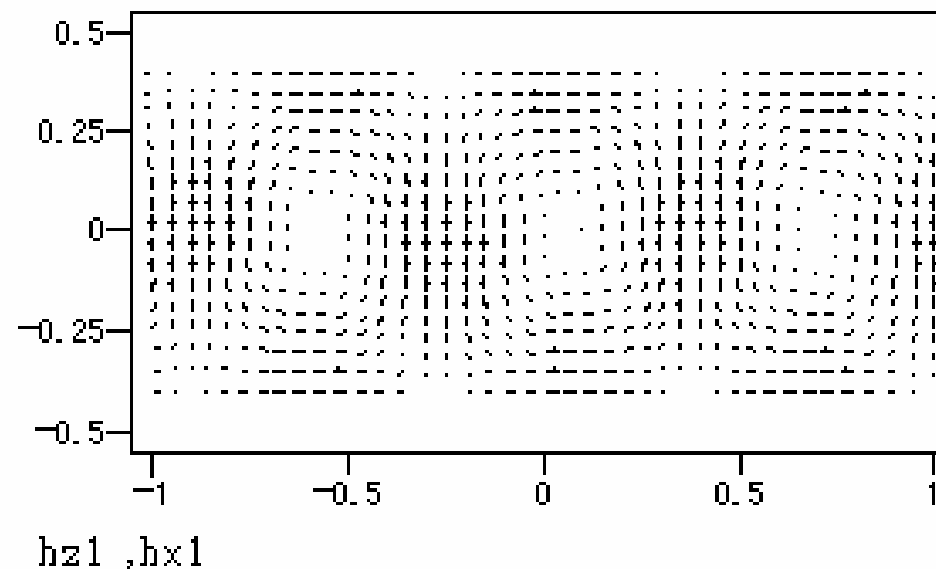
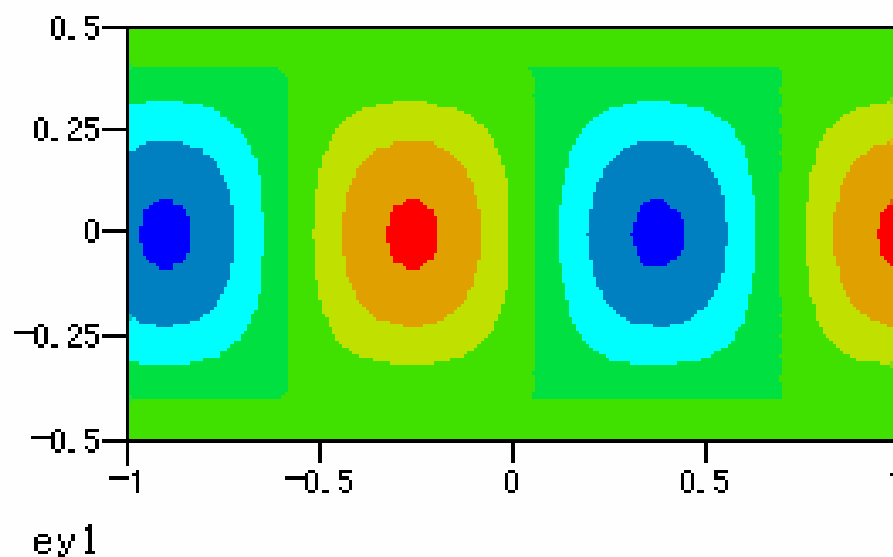
TE₁₀モードの様子

78/86



TE₁₀モードの伝搬

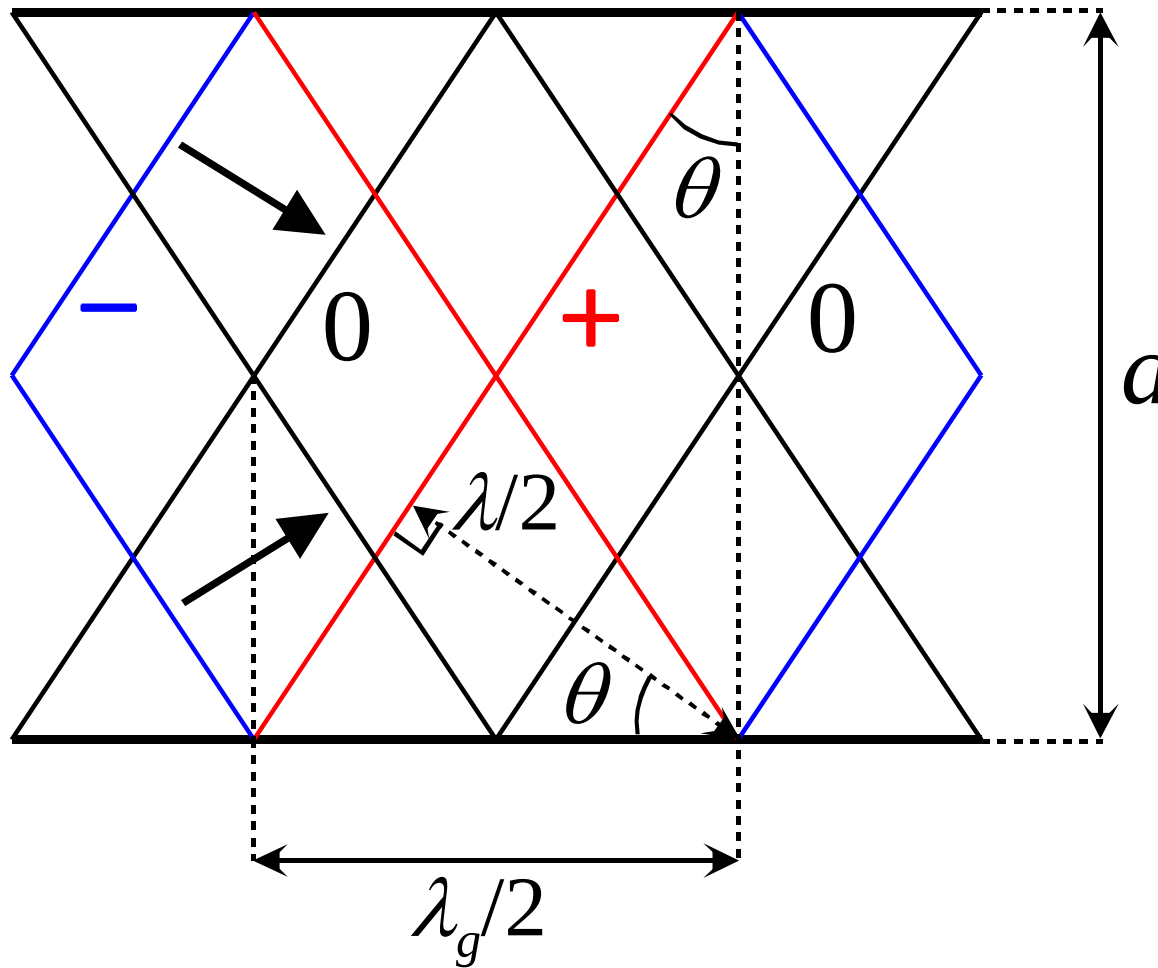
電界 磁界



- 広壁幅 $a=0.8\lambda$
- 広壁面

TE₁₀モードの平面波による合成 ^{80/86}

導体



$$a \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\lambda_g}{2} \cos \theta = \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

- 管軸に対し角度 2θ で右上と右下へ向かう平面波が交差

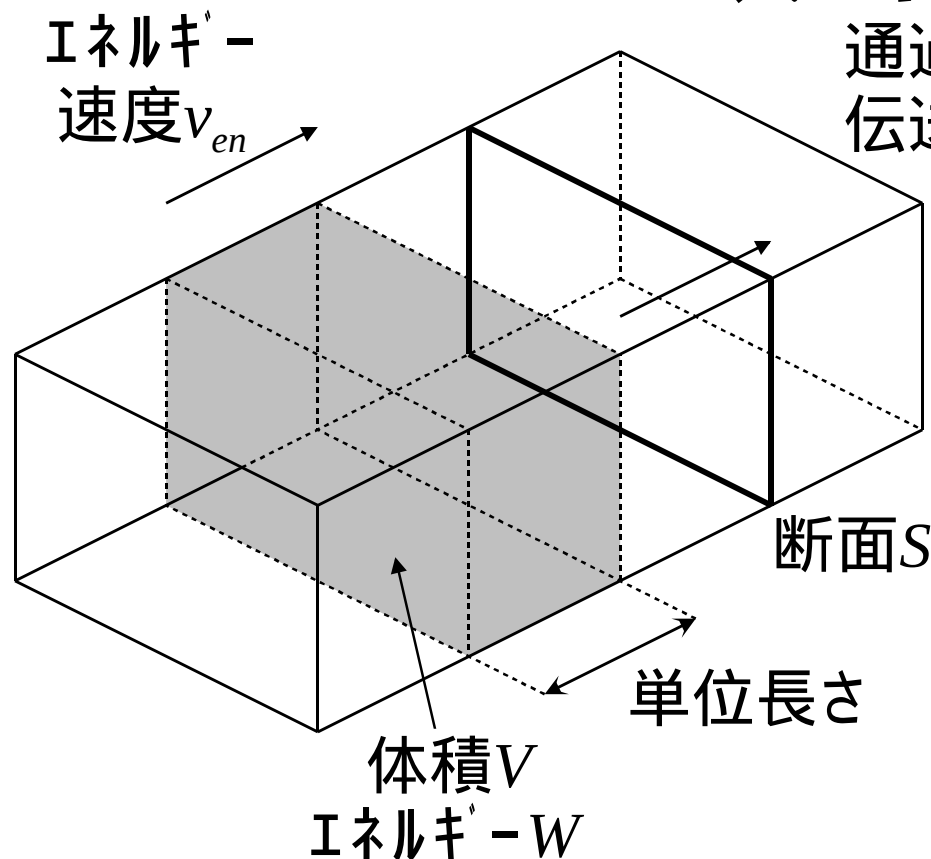
位相速度

$$v_p = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} \quad \exp\{j(\omega t - \beta z)\}$$

- 中空導波管の場合

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{k_0^2 - k_c^2}} = c \frac{k_0}{\beta} > c = \frac{\omega}{k_0}$$

エネルギー速度



通過電力
伝送電力 P $Wv_{en}=P$

$$W = \int_V \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}|^2 \right) dv$$

$$P = \operatorname{Re} \left(\int_S \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} \right)$$

1/2は振幅が波高値のため

• 中空方形導波管 TE_{10} モードの場合

$$W = \frac{\omega^2 \mu_0^2 \epsilon_0 a^3 b}{4\pi^2} |H_{10}|^2 \quad P = \frac{\beta \omega \mu_0 a^3 b}{4\pi^2} |H_{10}|^2$$

$$v_{en} = \frac{P}{W} = \frac{\beta}{\omega \mu_0 \epsilon_0} = c \frac{\beta}{k_0} = c \cos \theta < c$$

群速度

角周波数 位相速度 表現式

$$\begin{array}{lll}
 \omega_0 - d\omega & \beta_0 - d\beta & (m/2)V_0 \exp\{j(\omega_0 - d\omega)t\} \exp\{-j(\beta_0 - d\beta)z\} \\
 \omega_0 & \beta_0 & V_0 \exp(j\omega_0 t) \exp(-j\beta_0 z) \\
 \omega_0 + d\omega & \beta_0 + d\beta & (m/2)V_0 \exp\{j(\omega_0 + d\omega)t\} \exp\{-j(\beta_0 + d\beta)z\}
 \end{array}$$

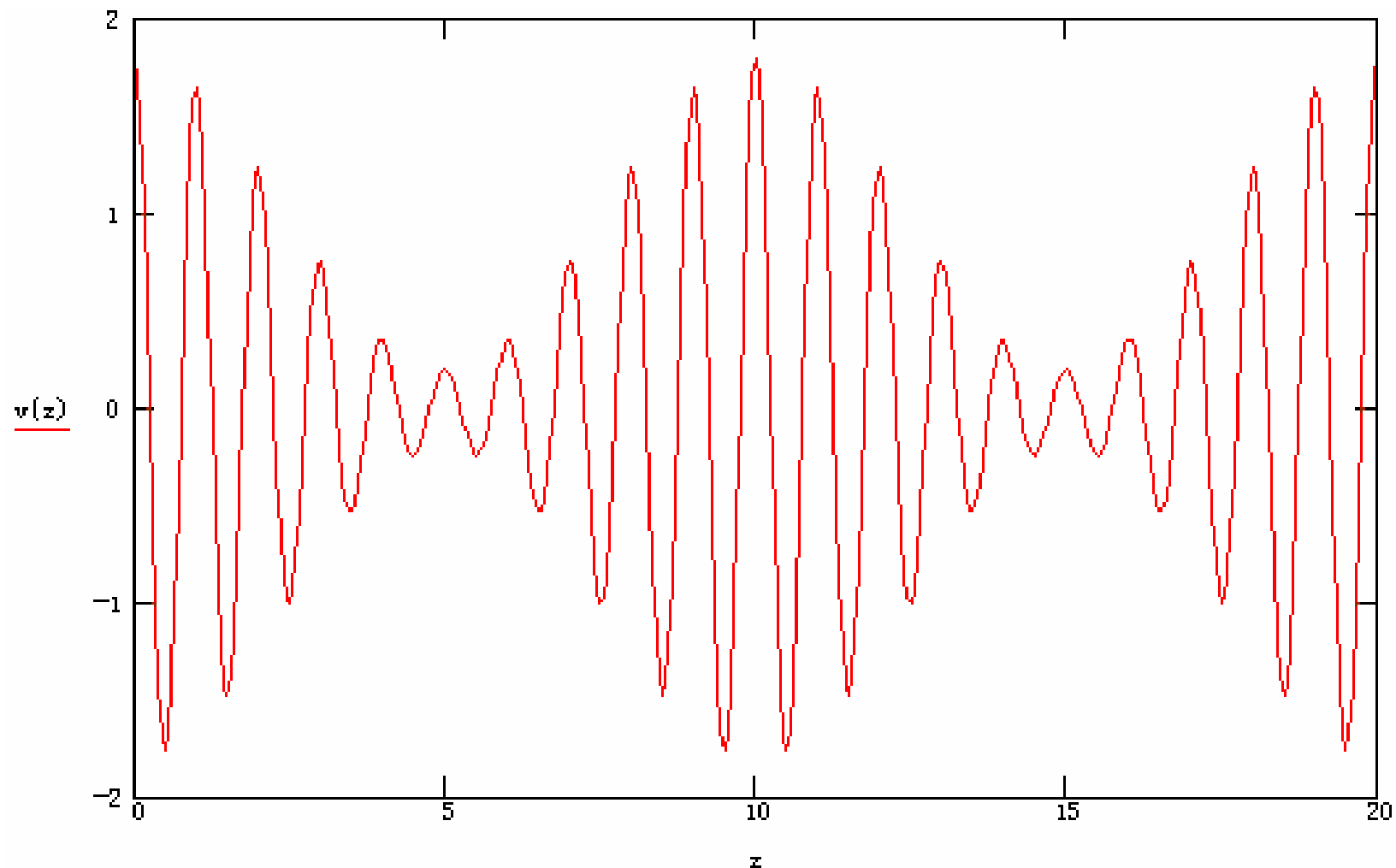
$$\begin{aligned}
 &\text{和 } V_0 \exp(j\omega_0 t) \exp(-j\beta z) \{1 + m \cos(td\omega - zd\beta)\} \\
 &= V_1 \exp(j\omega_0 t) \exp(-j\beta z)
 \end{aligned}$$

$$V_1 = 1 + m \cos(td\omega - zd\beta)$$

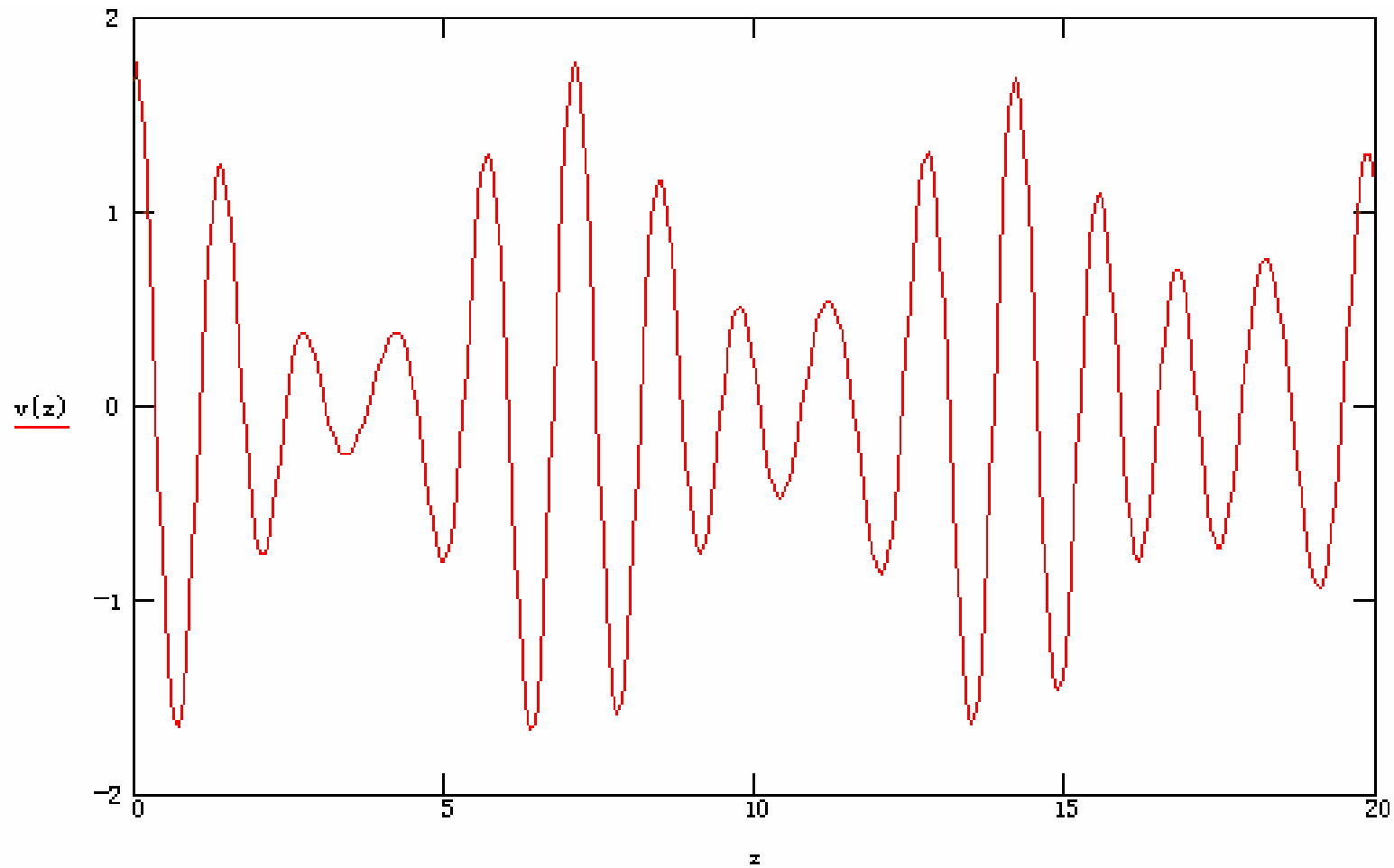
- 包絡線 $|V_1|$ が進む速度 $v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$
- 中空導波管の場合

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{\omega\mu_0\epsilon_0}{\beta}} = \frac{\beta}{\omega\mu_0\epsilon_0} = c \frac{\beta}{k_0} = v_{en} < c \qquad v_p v_g = c^2$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - k_c^2}$$



- $\beta = \omega(\text{線形}), m=0.8, d\omega=0.1\omega_0$
- 包絡線形変化なし → ひずみなし



- $\beta = \sqrt{\omega^2 - (\sqrt{2}\pi)^2}$ (非線形), $m=0.8$, $d\omega=0.1\omega_0$ $a = \lambda_0/\sqrt{2}$
- 包絡線形変化あり→ひずみ(分散性)あり

分散曲線

