確率と統計 (0)
「多次元の確率分布 (第7章)」

- **担当教員：　杉山　将 (計算工学専攻)**
- **居室：**　W8E-505
- **電子メール:**　sugi@cs.titech.ac.jp
- **授業のウェブサイト：**

  http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/

畳み込み

- 確率変数 X, Y が独立で，それぞれの確率（密度）関数が $g(x), h(y)$ の場合を考える
- それらの和 $Z = X + Y$ の確率（密度）関数は次式で与えられる

$$k(z) = \begin{cases} \sum_x g(x)h(z-x) \\ \int g(x)h(z-x)dx \end{cases}$$

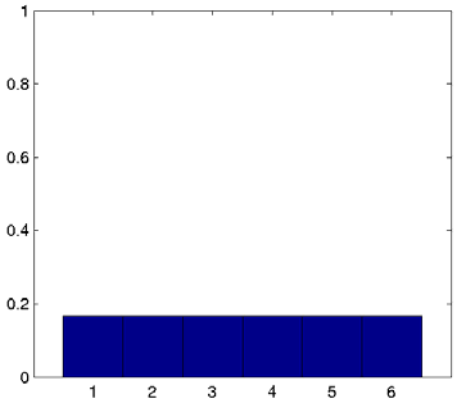
- 関数$g(x), h(y)$から関数 $k(z)$ を作る操作を**畳み込み**(convolution)といい，次式で表す

$$k = g * h$$

畳み込みの例

- さいころ1の出る目 X

$$g(x) = \frac{1}{6} \text{ for } x = 1, 2, \ldots, 6$$



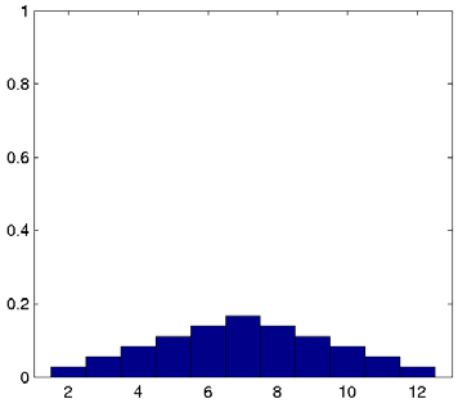
- さいころ2の出る目 Y

$$h(y) = \frac{1}{6} \text{ for } y = 1, 2, \ldots, 6$$

- 二つのさいころの出る目の和 $Z = X + Y$

$$k(z) = \frac{6 - |7 - z|}{36}$$

$$\text{for } z = 2, 3, \ldots, 12$$



畳み込みと積率母関数

- 畳み込みの積率母関数は，もとの積率母関数の積

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

- 証明：

$$\begin{aligned}\int e^{tz}k(z)dz &= \int e^{tz}\int g(x)h(z-x)dxdz \\ &= \int e^{ty}\int e^{tx}g(x)h(y)dxdy \\ &= \int e^{tx}g(x)dx\int e^{ty}h(y)dy\end{aligned}$$

再生性

- 同じ種類の確率分布同士の畳み込みの結果が再び同じ種類の確率分布になるとき，この確率分布族は**再生的**(reproductive)であるという
- 再生的な確率分布族の例：

  二項分布，ポアソン分布，　　負の二項分布，正規分布，　　ガンマ分布など

正規分布の再生性

- **正規分布の再生性の証明：正規分布の積率母関数は**

$$M_X(t) = \exp(\mu_X t + \sigma_X^2 t^2/2)$$

従って

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_X(t) M_Y(t) \\ &= \exp(\mu_X t + \sigma_X^2 t^2/2) \exp(\mu_Y t + \sigma_Y^2 t^2/2) \\ &= \exp(\mu_Z t + \sigma_Z^2 t^2/2) \end{aligned}$$

$$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y, \quad \sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

- **このことから，** X, Y **が独立で**

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

のとき， $Z = X + Y$ **は** $Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

2次元正規分布

- $\boldsymbol{\mu}$ ：2次元ベクトル
- $\boldsymbol{\Sigma}$ ：2次元正値対称行列 $\exists \boldsymbol{\Sigma}^{-1},\ \boldsymbol{\Sigma}^{\top} = \boldsymbol{\Sigma}$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- **期待値**：

$$E(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\mu}$$

- **分散共分散行列**：

$$V(\boldsymbol{z}) = E\{\ [\boldsymbol{z} - E(\boldsymbol{z})][\boldsymbol{z} - E(\boldsymbol{z})]^{\top}\}$$
$$= \boldsymbol{\Sigma}$$

2次元正規分布 (続き)

- $f(x,y)$ が確率密度関数であることの証明
  - $f(x,y) \geq 0$ は明らか
  - 以下, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = 1$ を証明する.

    そのために, まず正値対称行列 Σ には平方根行列 $\Sigma^{\frac{1}{2}}$ が存在することを示す. 固有値分解により,

    $$\Sigma = \lambda_1\phi_1\phi_1^\top + \lambda_2\phi_2\phi_2^\top$$

    と表すことができる. 但し, λ_1, λ_2 は固有値で ϕ_1, ϕ_2 はそれに対応する固有ベクトルである.

    $$\|\phi_1\| = \|\phi_2\| = 1 \qquad \langle\phi_1, \phi_2\rangle = 0$$

    正値行列の固有値は全て正なので, その平方根は常に存在する.

2次元正規分布 (続き)

よって,

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_1^\top + \sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_2^\top$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} x - \mu_X \\ y - \mu_Y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

$$|J| = |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}$$

と変数変換すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)|J|dvdu$$

$$= \frac{|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}}{2\pi|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2}\right) dvdu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv$$

$$= 1$$

2次元正規分布 (続き)

- **期待値の証明:**

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} x - \mu_X \\ y - \mu_Y \end{pmatrix}$$

と変数変換すれば，u, v は独立に標準正規分布に従う (前頁の証明参照) . 従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

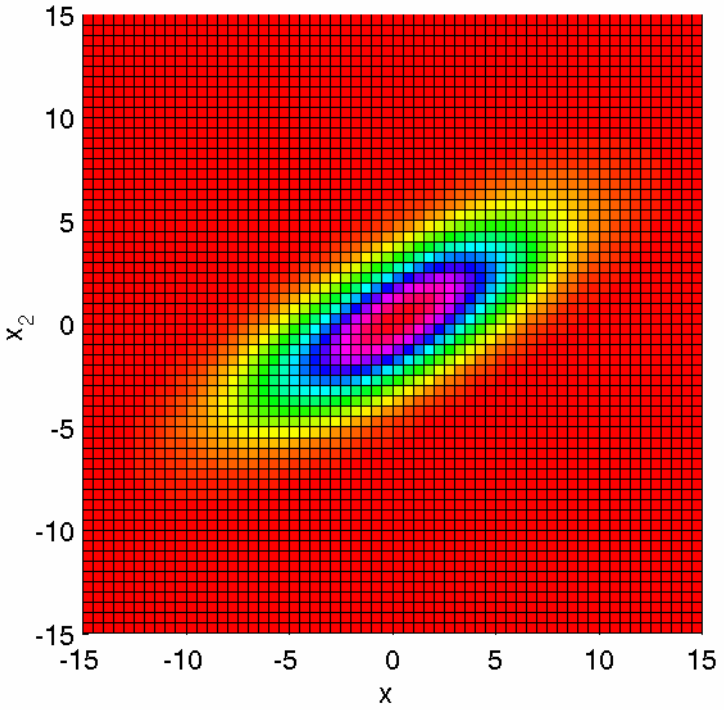
より

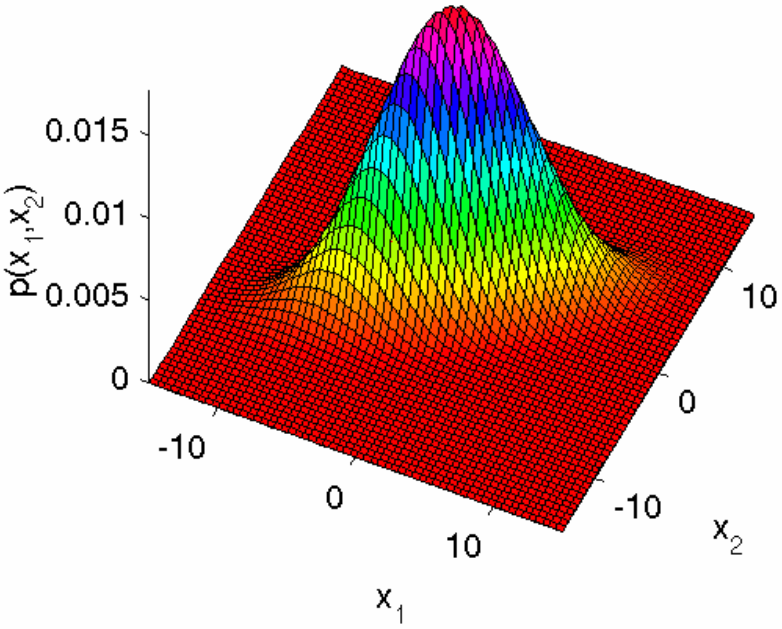
$$E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} E[u] \\ E[v] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

- **分散共分散行列の証明は宿題！**

2次元正規分布の例

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$





一般の多次元正規分布

- $\boldsymbol{\mu}$ ： d 次元ベクトル
- $\boldsymbol{\Sigma}$ ： d 次元正値対称行列 $^{\exists}\boldsymbol{\Sigma}^{-1},\ \boldsymbol{\Sigma}^{\top} = \boldsymbol{\Sigma}$

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

- **期待値**： $E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu}$
- **分散共分散行列**： $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \\ \vdots \\ x^{(d)} \end{pmatrix}$$

多次元正規分布の特別な場合

- **共分散がゼロ (即ち $\Sigma = \mathrm{diag}\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_d^2\right)$) のとき**

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \prod_{i=1}^{d} \sigma_i^2} \exp\left(-\sum_{i=1}^{d} \frac{(\boldsymbol{x}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}^{(i)})^2}{2\sigma_i^2} \right)$$

$\mathrm{diag}\,(a, b, \ldots, c)$: $a, b, \ldots, c$ **を対角成分に持つ対角行列**

- **さらに分散が等しい (即ち $\Sigma = \sigma^2 I$) のとき**

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})}{2\sigma^2} \right)$$

I : **単位行列**

小レポート

1. 2次元正規分布

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

の分散共分散行列が

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$V(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\Sigma}$$

で与えられることを証明せよ.

小レポート (続き)

2. Octaveなどを使い，2次元正規分布の確率密度関数のグラフ (3次元) を作成せよ．そして，分散共分散行列をいろいろと変化させ，正規分布の形がどのように変化するか調べよ．

   ヒント：共分散行列の固有方程式

$$\Sigma\phi = \lambda\phi$$

   を解きΣ　を固有値分解せよ

$$\Sigma = \lambda_1\phi_1\phi_1^\top + \lambda_2\phi_2\phi_2^\top$$

連絡事項

- **来週（6月30日）は休講！**
- **宿題の締め切りは次回の講義（7月7日）の最初**