

確率と統計 (0)

「多次元の確率分布 (第7章)」

- 担当教員: 杉山 将 (計算工学専攻)
- 居室: W8E-505
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp
- 授業のウェブサイト:
<http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/>

多次元の確率分布

193

- 複数の確率変数が与えられる場合、確率変数間の関係を調べることは重要である
- 簡単のため、2つの確率変数 X と Y の性質を考える

- 離散型の確率変数 X と Y の同時確率分布 (joint probability distribution):

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y)$$

$$f(x, y) \geq 0 \quad \sum_{x, y} f(x, y) = 1$$

- 連続型の確率変数 X と Y の同時確率密度関数 (joint probability density function):

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

$$f(x, y) \geq 0 \quad \int \int f(x, y) dx dy = 1$$

周辺確率

- **周辺確率分布**(marginal probability distribution):
離散型の確率変数 X, Y 単独の確率分布. 同時確率分布から, 次式で求められる

$$g(x) = \sum_y f(x, y) \quad h(y) = \sum_x f(x, y)$$

- **周辺確率密度関数**(marginal probability density function):

連続型の確率変数 X, Y 単独の確率密度関数. 同時確率密度関数から, 次式で求められる

$$g(x) = \int f(x, y) dy \quad h(y) = \int f(x, y) dx$$

- 二つの確率変数 X と Y の和の期待値は、それぞれの期待値の和と等しい

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- しかし X と Y の和の分散は、一般にはそれぞれの分散の和とは等しくない。実際、

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

- X と Y の**共分散**(covariance):

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

■ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$$\int \int (x + y) f(x, y) dx dy$$

$$= \int \int x f(x, y) dx dy + \int \int y f(x, y) dx dy$$

$$= \int x \int f(x, y) dy dx + \int y \int f(x, y) dx dy$$

$$= \int x g(x) dx + \int y h(y) dy$$

$$\blacksquare V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

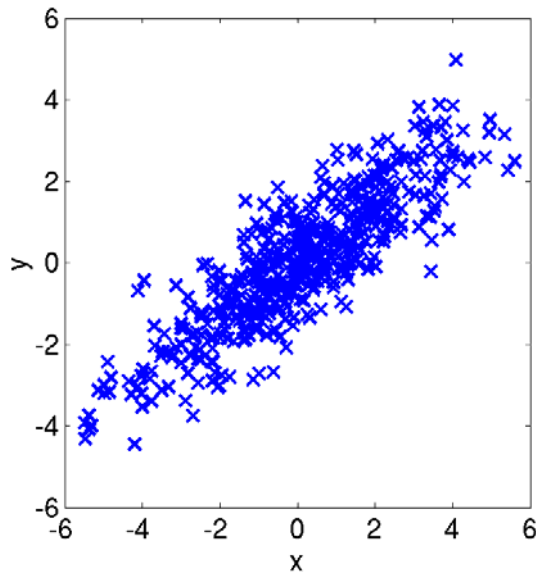
$$\begin{aligned} & E[(X + Y - E[X + Y])^2] \\ &= E[(X - E[X] + Y - E[Y])^2] \\ &= E[(X - E[X])^2 \\ &\quad + 2(X - E[X])(Y - E[Y]) \\ &\quad + (Y - E[Y])^2] \\ &= E[(X - E[X])^2] \\ &\quad + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &\quad + E[(Y - E[Y])^2] \end{aligned}$$

共分散の意味

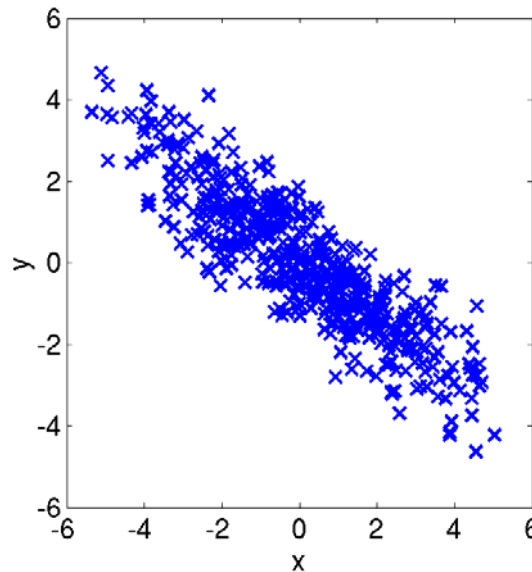
199

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

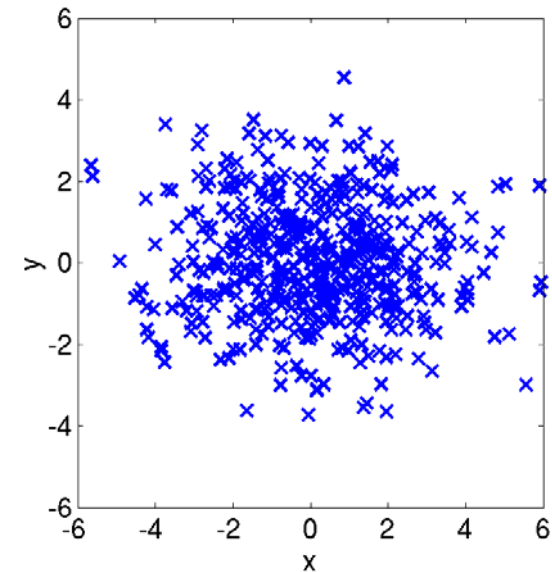
- $Cov(X, Y) > 0$ のとき, X と Y の増減は同傾向
- $Cov(X, Y) < 0$ のとき, X と Y の増減は逆傾向
- $Cov(X, Y) = 0$ のとき, X と Y の増減は無関係



$Cov(X, Y) > 0$



$Cov(X, Y) < 0$



$Cov(X, Y) \approx 0$

共分散の使用法の例

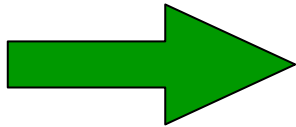
200

- A社の株価を X , B社の株価を Y とする

- $Cov(X, Y) > 0$ のとき,

$$V(X + Y) > V(X) + V(Y)$$

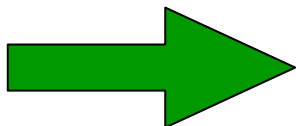
A, B両社の株を買うと, 分散が拡大

 変動リスクが増大し, 資産価値は不安定

- $Cov(X, Y) < 0$ のとき,

$$V(X + Y) < V(X) + V(Y)$$

A, B両社の株を買うと, 分散が縮小

 変動リスクが抑制され, 資産価値は安定

分散・共分散行列

201

- 分散・共分散行列(variance-covariance matrix):

$$\begin{aligned}\Sigma &= E \left[\left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - E \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - E \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\}^{\top} \right] \\ &= \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X, Y) \\ Cov(Y, X) & V(Y) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- 対角成分は分散, 非対角成分は共分散

- **相関係数**(correlation coefficient): 共分散を標準偏差で割った値

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

- 相関係数は $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ を満たす (**証明は宿題**)
- $\rho_{XY} > 0$ のとき、正の相関があるという
- $\rho_{XY} < 0$ のとき、負の相関があるという
- $|\rho_{XY}| \approx 1$ のとき、 X と Y の増減関係はより確定的になる
- $\rho_{XY} = 0$ のとき、**無相関**(uncorrelated)であるという

条件付き確率

- 離散型の確率変数 X, Y の条件付き確率分布
(conditional probability distribution)

$$g(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \text{ for } h(y) \neq 0$$

- 連続型の確率変数 X, Y の条件付き確率密度関数
(conditional probability density function):

$$g(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \text{ for } h(y) \neq 0$$

条件付きの期待値と分散

204

- 条件付き確率も確率なので、期待値や分散が定義できる
- 条件付き期待値(conditional expectation)

$$\mu_{X|y} \equiv E(X|y) = \begin{cases} \sum_x x \cdot g(x|y) \\ \int x g(x|y) dx \end{cases}$$

- 条件付き分散(conditional variance)

$$V(X|y) = \begin{cases} \sum_x (x - \mu_{X|y})^2 g(x|y) \\ \int (x - \mu_{X|y})^2 g(x|y) dx \end{cases}$$

独立性

■ $f(x, y) = g(x)h(y)$ が成り立つとき, X と Y は互いに**独立**(independent)であるという

■ 2つの確率変数が独立のとき,

- 積の期待値はそれぞれの期待値の積と一致する

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

- 和の積率母関数はそれぞれの積率母関数の積と一致する

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

- 2つの確率変数は無相関

$$Cov(X, Y) = 0$$

■ **証明は宿題**

独立と無相関

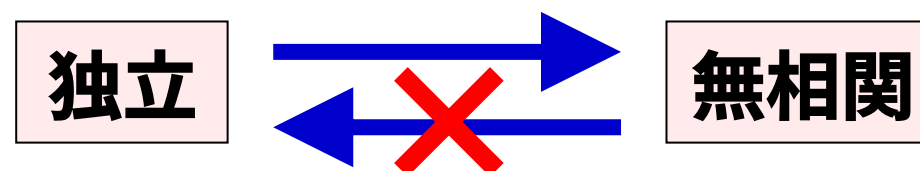
- 2つの確率変数が独立ならば無相関である
- しかし、逆は一般には正しくない. 即ち、2つの確率変数が無相関であるからといって独立であるとは限らない
- 反例:

$$X \sim U(-1/2, 1/2), \quad Y = X^2$$

$$E[X] = \int_{-1/2}^{1/2} x dx = 0 \quad E[XY] = \int_{-1/2}^{1/2} x^3 dx = 0$$

なので $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$

しかし X と Y は明らかに独立ではない.



小レポート

- 1. $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ を証明せよ.
- 二つの確率変数 X と Y が独立のとき,
次式が成り立つことを証明せよ.
 - 2. $E[XY] = E[X]E[Y]$
 - 3. $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$
 - 4. $Cov(X, Y) = 0$
- 5. (おまけの課題) : 無相関だけど独立でない簡単な例を作成せよ.